Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2012 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 09 25. 06. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi t} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}}$$

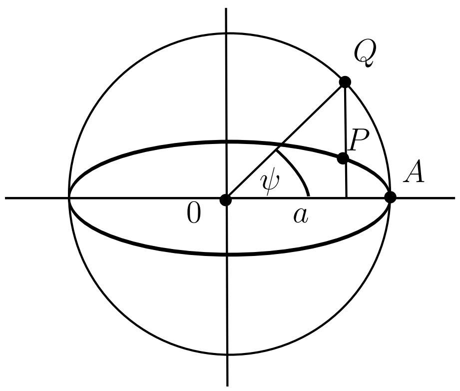
   die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, t) = \partial_t \Phi(\mathbf{x}, t)$$

   löst.

   Hinweis: Nutzen Sie die Formel aus der Vorlesung für den Laplace-Operator in Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$.

2. Laut den Keplerschen Gesetzen bewegen sich die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne sich in einem der beiden Brennpunkte befindet. Kennt man die Bahn eines Planeten, das heißt die Ebene, in der sie verläuft, die Umlaufzeit T, die Exzentrizität $0 < \varepsilon < 1$ der Ellipse und die Länge a der großen Halbachse, so kann man den Aufenthaltsort des Planeten in Abhängigkeit von der Zeit mit Hilfe der Kepler-Gleichung bestimmen:



   Sei dazu t die Zeit, $t = 0$ der Zeitpunkt, an dem der Planet die große Halbachse passiert und $\psi = \measuredangle AOQ$ die sogenannte “Exzentrische Anomalie”(vgl. Bild). Dann gilt folgender Zusammenhang (ohne Beweis):

$$\frac{2\pi}{T} t = \psi - \varepsilon \sin \psi$$

   (a) Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $\psi(t)$ gibt, die folgende Gleichung löst:

$$f(t, \psi) = \frac{2\pi}{T} t - \psi + \varepsilon \sin \psi = 0.$$

   (b) Bestimmen Sie die Stellen, an denen die Winkelgeschwindigkeit ψ' extremal ist.

Bitte wenden!

3. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = (x^3 + \cos(y) + z) \cdot e^{\sin(z)}.$$

   (a) Berechnen Sie für die Funktion f den Gradienten und die Hessematrix für alle Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   (b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von f an der Stelle $(0, 0, 0)$ an.

4. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema, d.h. finden Sie alle stationären Punkte und bestimmen Sie ihren Typ:

   (a) $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \text{ und } z \neq 0\} \to \mathbb{R}$,
   $f(x, y, z) = \frac{1}{y} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{z} + 4y - 4x - z$

   (b) $f : (0, \frac{\pi}{2})^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$
   Hinweis: Benutzen Sie die Symmetrien der Kosinusfunktion.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 02.07.12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt