Probeklausur zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. S. Goette

03.08.2012

---

1. Betrachten Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Die von γ eingeschlossene Kreisscheibe wird mit K bezeichnet.

   (a) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer Bereich und $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2-Funktionen. Leiten Sie folgende Formel her:

   $$\iint_B (f\,\Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g)\,\mathrm{d}F = \oint_{\partial B} f\,\partial_{\mathbf{n}} g\,ds$$

   und folgern Sie daraus

   $$\iint_B (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\,\mathrm{d}F = \oint_{\partial B} (f\,\partial_{\mathbf{n}} g - g\,\partial_{\mathbf{n}} f)\,ds.$$

   (b) Betrachten Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = \frac{1}{2}x^2$. Berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} h$ und Δh.

   (c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß und der Funktion h den Flächeninhalt der Kreisscheibe K.

   (d) Berechnen Sie mit Hilfe der ersten Formel aus 1a) und der Funktion h folgendes Integral

   $$\int_K y^2 \mathrm{d}F.$$

2. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

   $$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Betrachten Sie die quadratische Form $q(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^\top$ auf der ausgefüllten Halbkugel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{ und } y \ge 0\}$. Bestimmen Sie Maximum und Minimum von q auf K.

3. Für die Größen y und x wird folgender quadratischer Zusammenhang $y(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ vermutet. Um dies zu bestätigen wird eine Messreihe durchgeführt, die folgende Messwerte liefert:

Messung i	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2
y_i	4	1	-2	8

(a) Zeigen Sie, dass (α_1, α_2) genau dann das lineare Gleichungssystem (1) löst, wenn die Konstanten α_1 und α_2 so bestimmt wurden, dass der Fehler $\sum_{i=1}^{4}(y_i - (\alpha_1 x_i - \alpha_2 x_i^2))^2$ minimal ist

$$\begin{aligned} 6u + 8v &= 10 \\ 8u + 18v &= 34. \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (1) mit dem Gauß-Algorithmus.

4. Betrachten Sie die geschlossene Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(\varphi) = (1 + \cos(\varphi)) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurve c und markieren Sie den von ihr eingschlossenen ebenen Bereich K.

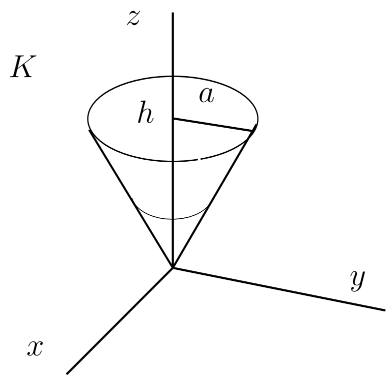
(b) Betrachte das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $V(x, y) = \begin{pmatrix} 2x^2y \\ -2xy^2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das normale Kurvenintegral von V längs der Kurve c

$$\oint_c V \, \mathrm{d}\mathbf{n}.$$

Hinweis: Benutzen Sie einen der Integralsätze aus der Vorlesung.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von K mit Hilfe von Polarkoordinaten und der Transformationsformel.

5. Der abgebildete Drehkegel $K = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq h,\ x^2 + y^2 \leq (\frac{a}{h}z)^2\}$ der Höhe h und mit Radius a habe die Massendichte $\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2$.



(a) Berechnen Sie für die Zylinderkoordinaten $f(r, \varphi, z) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z)$ die Jacobimatrix und deren Determinante.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe einer Transformation in Zylinderkoordinanten die Gesamtmasse

$$M = \int_K \rho \, dx \, dy \, dz.$$

(c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts $\overline{\mathbf{S}} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \int_K x \, \rho \, dx \, dy \, dz, \quad \overline{y} = \frac{1}{M} \int_K y \, \rho \, dx \, dy \, dz, \quad \overline{z} = \frac{1}{M} \int_K z \, \rho \, dx \, dy \, dz.$$

6. Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) := (xy^2 + x + 1, 2x^2y - y + 4).$$

(a) Berechnen Sie an jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Jacobimatrix $J_F(x, y)$ von F.

(b) Bestimmen Sie an jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Determinante der Jacobimatrix $J_F(x, y)$.

(c) Geben Sie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ an, auf der $J_F(x, y)$ invertiert werden kann, und bestimmen Sie die Inverse $J_F(x, y)^{-1}$ an jedem Punkt $(x, y) \in D$.

(d) Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren eine Näherung der Nullstelle. Wählen Sie dazu als Startwert $(0, 9/2)$ und führen Sie eine Iteration durch.