Musterlösung zur Probeklausur zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. S. Goette

17.09.2012

---

1. Betrachten Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Die von γ eingeschlossene Kreisscheibe wird mit K bezeichnet.

   (a) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer Bereich und $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2-Funktionen. Leiten Sie folgende Formel her:

   $$\iint_B (f\,\Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g)\,\mathrm{d}F = \oint_{\partial B} f\,\partial_{\mathbf{n}} g\,ds$$

   und folgern Sie daraus

   $$\iint_B (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\,\mathrm{d}F = \oint_{\partial B} (f\,\partial_{\mathbf{n}} g - g\,\partial_{\mathbf{n}} f)\,ds.$$

   Lösung: Der Divergenzsatz besagt insbesondere, dass für ein Vektorfeld $V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und einen regulären Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt:

   $$\iint_B \operatorname{div} V\,\mathrm{d}F = \oint_{\partial B} V \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}.$$

   Im Fall $V = f\ \operatorname{grad} g$ gilt:

   $$V \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = f\ \operatorname{grad} g \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = f\,\partial_{\mathbf{n}} g\,ds$$

   und

   $$\operatorname{div} V = f \cdot \operatorname{div}\operatorname{grad} g + \operatorname{grad} f \operatorname{grad} g.$$

   Also folgt:

   $$\oint_{\partial B} V\,ds = \iint_B (f\,\Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g)\,\mathrm{d}F$$

   Die zweite Formel erhalten wir, indem wir in der ersten Formel die Rolle von f und g vertauschen und dann die beiden Gleichungen von einander abziehen:

   $$\begin{aligned}\oint_{\partial B} (f\,\partial_{\mathbf{n}} g - g\,\partial_{\mathbf{n}} f)\,ds &= \iint_B (f\,\Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g - (g\,\Delta f + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g))\,\mathrm{d}F \\ &= \iint_B (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\,\mathrm{d}F\end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \frac{1}{2}x^2$. Berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} h$ und Δh.

Lösung: Es gilt:

$$\operatorname{grad} h(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta\, h(x,y) = \frac{\partial^2 h}{(\partial x)^2}(x,y) + \frac{\partial^2 h}{(\partial y)^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}0 = 1.$$

(c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß und der Funktion h den Flächeninhalt der Kreisscheibe K.

Lösung: Da γ so parametrisiert ist, dass die Kreisscheibe links zur Durchlaufrichtung liegt, ist der äußere Normalenvektor durch

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} \sin'(t) \\ -\cos'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

gegeben. Außerdem gilt $ds = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}dt = dt$.

Der Satz von Gauß besagt nun insbesondere, dass für jede Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und jede reguläre Fläche $B \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\iint_B \Delta u \,\mathrm{d}F = \oint_{\partial B} \partial_{\mathbf{n}} u \,\mathrm{d}s.$$

Im Fall $u = h$ und $B = K$ gilt:

$$\begin{aligned} \iint_B \mathrm{d}F &\overset{1b}{=} \iint_B \Delta h \,\mathrm{d}F \overset{1a}{=} \oint_{\partial B} \partial_{\mathbf{n}} h \,\mathrm{d}s = \oint_{\partial B} \operatorname{grad} h \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \,\mathrm{d}t = \pi. \end{aligned}$$

(d) Berechnen Sie mit Hilfe der ersten Formel aus 1a) und der Funktion h folgendes Integral

$$\int_B y^2 \mathrm{d}F.$$

Lösung: Setzen wir $g = h$, $f(x,y) = y^2$ und $B = K$, folgt
$\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und somit:

$$\begin{aligned} \iint_B f \,\mathrm{d}F &\overset{1b}{=} \iint_B f \Delta h \,\mathrm{d}F = \oint_{\partial B} f \partial_{\mathbf{n}} g \,\mathrm{d}s = \oint_{\partial B} f \operatorname{grad} g \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos^2(t) \,\mathrm{d}t = \\ &\overset{Addthrm.}{=} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)^2 \,\mathrm{d}t \overset{Substform.}{=} \int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{2}\sin(s)\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \,\mathrm{d}s = \frac{1}{8} \cdot 2\pi = \frac{1}{4}\pi, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung aus folgender Symmetrieüberlegung (Achtung: die Länge des Intervalls muss dazu ein Vielfaches von 2π sein!) folgt:

$$\int_0^{4\pi} \sin^2 s \,\mathrm{d}s = \int_0^{4\pi} \cos^2 s \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} 1 \,\mathrm{d}s = 2\pi.$$

2. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Bestimmen der Eigenwerte: Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} &= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1) - 4(\lambda-3) - 4(\lambda-1) \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass -1 eine Nullstelle ist. Dann teilt man den Faktor $(\lambda+1)$ raus:

$$\begin{array}{l} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 : (\lambda+1) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 \\ \underline{-(\lambda^3 + \ \lambda^2)} \\ \quad -7\lambda^2 + 3\lambda + 10 \\ \quad \underline{-(-7\lambda^2 - 7\lambda)} \\ \qquad\qquad 10\lambda + 10 \end{array}$$

Wir berechnen die übrigen Nullstellen:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2 - 7\lambda + \frac{49}{4} = \frac{9}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = 5 \text{ oder } \lambda = 2$$

Bestimmen der Eigenräume:

- zum Eigenwert -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{4} \\ +2\cdot I' \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +II \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist gegeben durch $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

- zum Eigenwert 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2\cdot I \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{2}\cdot II \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist gegeben durch $\left\{t\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}$.

- zum Eigenwert 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0\\ -2 & -3 & -2 & 0\\ 0 & -2 & -4 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}\cdot -\frac{1}{2}\\ +2\cdot I'\\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & -4 & 0\end{array}\right) \quad -2\cdot II$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 5 ist gegeben durch $\left\{t\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}$.

(b) Betrachten Sie die quadratische Form $q(x,y,z) = (x,y,z)A(x,y,z)^\top$ auf der ausgefüllten Halbkugel $K := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1 \text{ und } y\ge 0\}$. Bestimmen Sie Maximum und Minimum von q auf K.

Lösung:

Schritt 1: Extrempunkte im Immern:

Es gilt

$$J_f(x,y,z) = 2\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Da Null kein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist, ist $(0,0,0)$ der einzige kritische Punkt von f. Wir sehen auch direkt anhand der Eigenwerte, dass $(0,0,0)$ weder Maximum noch Minimum ist, da

$$f\left(t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) = -t^2\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|^2 \le 0 \text{ mit “ = “} \quad\Leftrightarrow\quad t=0$$

$$f\left(t\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\right) = 2t^2\left\|\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\|^2 \ge 0 \text{ mit “ = “} \quad\Leftrightarrow\quad t=0$$

Schritt 2: Extrempunkte auf der oberen Halbsphäre (Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren):

Die Lagrangegleichungen für die Sphäre haben folgende Form:

$$2\cdot\mathbf{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + 2\cdot\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{“}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor von } \mathbf{A} \text{ zum Eigenwert } \lambda\text{“}$$

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \qquad \text{“}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ hat Norm 1“}$$

Mit der Zusatzbedingung $y \geq 0$ erhalten wir also drei kritische Punkte
$p_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $p_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ und $p_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$
mit $f(p_1) = -1$, $f(p_2) = 2$ und $f(p_3) = 5$.

Schritt 3: Extrempunkte auf der Kreisscheibe ($x^2 + z^2 < 1$, $y = 0$):

Wir setzen $y = 0$ und erhalten $f(x, 0, z) = (x, z)\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}$.

Im Innern der Kreisscheibe bestimmen wir die kritischen Punkte und erhalten, da $\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ vollen Rang hat, erneut $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ als einzigen kritischen Punkt.

Nun parametrisieren wir den Rand durch $t \in \mapsto \begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} g(t) :=& f(\cos t, 0, \sin t) = 3\cos^2 t + \sin^2 t \\ g'(t) =& -6\cos t \sin t + \sin t \cos t = -5 \cos t \sin t \end{aligned}$$

Die kritischen Stellen sind somit $\frac{1}{2}\pi\mathbb{Z}$ mit $g(\pi\mathbb{Z}) = 3$, $g(\frac{1}{2} + \pi\mathbb{Z}) = 1$.

Das absolute Maximum ist 5 und wird am Punkt p_3 angenommen und das absolute Minumum ist -1 und wird am Punkte p_1 angenommen.

3. Für die Größen y und x wird folgender quadratischer Zusammenhang $y(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ vermutet. Um dies zu bestätigen wird eine Messreihe durchgeführt, die folgende Messwerte liefert:

Messung i	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2
y_i	4	1	-2	8

(a) Zeigen Sie, dass (α_1, α_2) genau dann das lineare Gleichungssystem (1) löst, wenn die Konstanten α_1 und α_2 so bestimmt wurden, dass der Fehler $\sum_{i=1}^{4}(y_i - (\alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2))^2$ minimal ist

$$\begin{aligned} 6u + 8v &= 10 \\ 8u + 18v &= 34. \end{aligned} \tag{1}$$

Lösung: Bezeichne

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\-2\\8\end{pmatrix}, \mathbf{X} := \begin{pmatrix}x_1 & x_1^2\\x_2 & x_2^2\\x_3 & x_3^2\\x_4 & x_4^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 0\\1 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} \text{ und}$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2) := \sum_{i=1}^{4}(y_i - (\alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2))^2.$$

Dann gilt

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \|\mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \alpha\|^2.$$

Nach Satz 8.4.5 sind die Lösungen des Minimierungsproblems in diesem Fall genau die Lösungen des Linearen Gleichungssystems $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\alpha = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$. Wir berechnen noch explizit

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -4-2+16 \\ 4-2+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1+1+4 & -1+1+8 \\ -1+1+8 & 1+1+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}$$

und haben somit die Aussage gezeigt.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (1) mit dem Gauß-Algorithmus.

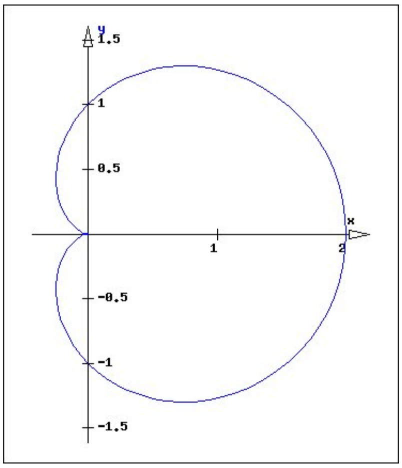
$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & 10 \\ 8 & 18 & 34 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{6} \\ -8I' \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{22}{3} & \frac{62}{3} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{3}{22} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{31}{11} \end{array}\right)$$

Es folgt $\alpha_2 = \frac{31}{11}$ und $\alpha_1 = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{31}{11} = -\frac{69}{33} = -\frac{23}{11}$.

4. Betrachten Sie die geschlossene Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(\varphi) = (1 + \cos(\varphi)) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurve c und markieren Sie den von ihr eingschlossenen ebenen Bereich K.

Lösung: Skizze:



(b) Betrachte das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $V(x, y) = \begin{pmatrix} 2x^2 y \\ -2xy^2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das normale Kurvenintegral von V längs der Kurve c

$$\oint_c V \, \mathrm{d}\mathbf{n}.$$

Hinweis: Benutzen Sie einen der Integralsätze aus der Vorlesung.

Lösung: Es gilt: $\operatorname{div} V(x, y) = 4xy - 4xy = 0$.

Mit dem Divergenzsatz folgt nun: $\oint_c V \, \mathrm{d}\mathbf{n} = \int\int_K \operatorname{div} V \, \mathrm{d}F = 0$.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von K mit Hilfe von Polarkoordinaten und der Transformationsformel.

$$\int\int_K \mathrm{d}F \overset{\text{Trafoform.}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos(\varphi)} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(\varphi))^2\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+2\cos(\varphi)+\cos(\varphi)^2)\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{1}{2}(\varphi + 2\sin(\varphi))|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)^2\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\cdot(2\pi+0) + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi,$$

wobei wir bei der zweitletzten Gleichung wieder die gleiche Symmtrieüberlegung wie in Aufgabe 1d) benutzt haben.

5. Der abgebildete Drehkegel $K = \{(x,y,z) \mid 0 \le z \le h,\ x^2+y^2 \le (\frac{a}{h}z)^2\}$ der Höhe h und mit Radius a habe die Massendichte $\rho(x,y,z) = 1 + x^2 + y^2$.

(a) Berechnen Sie für die Zylinderkoordinaten $f(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ die Jacobimatrix und deren Determinante.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe einer Transformation in Zylinderkoordinanten die Gesamtmasse
$$M = \int_K \rho\, dx\, dy\, dz.$$

(c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts $\overline{\mathbf{S}} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$
$$\overline{x} = \frac{1}{M}\int_K x\,\rho\, dx\, dy\, dz, \quad \overline{y} = \frac{1}{M}\int_K y\,\rho\, dx\, dy\, dz, \quad \overline{z} = \frac{1}{M}\int_K z\,\rho\, dx\, dy\, dz.$$

Lösung:

(a) Berechnung der Jacobimatrix der Zylinderkoordinaten:
$$J_f(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Determinanten:
$$\det J_f(r,\varphi,z) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

(b) Für $\overline{K} = \{(r,\varphi,z) \mid 0 \le r \le \frac{a}{h}z,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le h\}$ gilt $f(\overline{K}) = K$ (und die

Menge auf der $f|_{\overline{K}}$ nicht injektiv ist, ist eine Nullmenge).

$$\begin{aligned}
M &= \int_K \rho \, dx \, dy \, dz \\
&\overset{\text{Trafoform.}}{=} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}z} \rho \circ f(r,\varphi,z) \cdot \det J_f(r,\varphi,z) \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}z} (1 + (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2) \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}z} \left(r + r^3\right) dr \, d\varphi \, dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a}{h}z\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{h}z\right)^4 \right) d\varphi \, dz \\
&= \left(\frac{a}{h}\right)^2 \pi \int_0^h z^2 \, dz + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4 \pi \int_0^h z^4 \, dz \\
&= \left(\frac{a}{h}\right)^2 \pi \frac{1}{3} h^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4 \pi \frac{1}{5} h^5 = \pi \left(\frac{1}{3} a^2 h + \frac{1}{10} a^4 h \right)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_K x\rho \, dx \, dy \, dz &\overset{\text{Trafoform.}}{=} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}z} (x\rho) \circ f(r,\varphi,z) \cdot \det J_f(r,\varphi,z) \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_0^h \int_0^{\frac{a}{h}z} \int_0^{2\pi} r\cos\varphi \cdot (1 + (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2) \cdot r \, d\varphi \, dr \, dz \\
&= \int_0^h \int_0^{\frac{a}{h}z} (r^2 + r^4) \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \, d \, dz = \int_0^h \int_0^{\frac{a}{h}z} (r^2 + r^4) \cdot 0 \, d \, dz = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_K y\rho \, dx \, dy \, dz &\overset{\text{Trafoform.}}{=} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}z} (y\rho) \circ f(r,\varphi,z) \cdot \det J_f(r,\varphi,z) \, dr \, d\varphi \, dz \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^h \int_0^{\frac{a}{h}z} \int_0^{2\pi} r\sin\varphi \cdot (1 + (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2) \cdot r \, d\varphi \, dr \, dz \\
&= \int_0^h \int_0^{\frac{a}{h}z} (r^2 + r^4) \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \, d \, dz = \int_0^h \int_0^{\frac{a}{h}z} (r^2 + r^4) \cdot 0 \, dr \, dz = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_K z\rho \, dx \, dy \, dz \\
&\overset{\text{Trafoform.}}{=} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}z} (z\rho) \circ f(r,\varphi,z) \cdot \det J_f(r,\varphi,z) \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}z} z \cdot (1 + (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2) \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}z} z(r + r^3) \, dr \, d\varphi \, dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} z \cdot \left(\frac{a}{h}z\right)^2 + \frac{1}{4} z \cdot \left(\frac{a}{h}z\right)^4 \right) d\varphi \, dz \\
&= \left(\frac{a}{h}\right)^2 \pi \int_0^h z^3 \, dz + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4 \pi \int_0^h z^5 \, dz \\
&= \left(\frac{a}{h}\right)^2 \pi \cdot \frac{1}{4} h^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4 \pi \cdot \frac{1}{6} h^6 = \pi \left(\frac{1}{4} a^2 h^2 + \frac{1}{12} a^4 h^2 \right)
\end{aligned}$$

Wir erhalten also $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 0$ und $\overline{z} = h \cdot \dfrac{15 + 5a^2}{20 + 6a^2}$.

6. Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) := (xy^2 + x + 1, 2x^2y - y + 4).$$

(a) Berechnen Sie an jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Jacobimatrix $J_F(x, y)$ von F.

Lösung:

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + 1 & 2xy \\ 4xy & 2x^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie an jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Determinante der Jacobimatrix $J_F(x, y)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \det(J_F(x, y)) =& (y^2 + 1) \cdot (2x^2 - 1) - 8x^2y^2 = 2x^2y^2 + 2x^2 - y^2 - 1 - 8x^2y^2 \\ =& -6x^2y^2 + 2x^2 - y^2 - 1 =: \kappa(x, y). \end{aligned}$$

(c) Geben Sie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ an, auf der $J_F(x, y)$ invertiert werden kann, und bestimmen Sie die Inverse $J_F(x, y)^{-1}$ an jedem Punkt $(x, y) \in D$.

Lösung: Wir formen $\det(J_F(x, y)) = 0$ um und erhalten $y^2(1 + 6x^2) = 2x^2 - 1$. Es folgt:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \det J_F(x, y) \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (x, y) \middle| |x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\sqrt{\frac{2x^2 - 1}{1 + 6x^2}} \right\}$$

Berechnen der Inversen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} y^2 + 1 & 2xy & 1 & 0 \\ 4xy & 2x^2 - 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{1}{y^2+1} \\ -\frac{4xy}{y^2+1} I' \end{array} \overset{(\star)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2xy}{y^2+1} & \frac{1}{y^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa(x,y)}{y^2+1} & -\frac{4xy}{y^2+1} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -\frac{2xy}{y^2+1} II' \\ \cdot \frac{y^2+1}{\kappa(x,y)} \end{array} \quad (\kappa(x, y) \neq 0!)$$

$$\overset{(\star\star)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2x^2-1}{\kappa(x,y)} & \frac{-2xy}{\kappa(x,y)} \\ 0 & 1 & \frac{-4xy}{\kappa(x,y)} & \frac{y^2+1}{\kappa(x,y)} \end{array} \right)$$

Nebenrechnungen:

$$2x^2 - 1 - \frac{8x^2y^2}{y^2 + 1} = \frac{2x^2y^2 + 2x^2 - y^2 - 1 - 8x^2y^2}{y^2 + 1} = \frac{\kappa(x, y)}{y^2 + 1} \qquad (\star)$$

$$\frac{1}{y^2 + 1} + \frac{8x^2y^2}{\kappa(x, y) \cdot (y^2 + 1)} = \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{(y^2 + 1)(2x^2 - 1) - \kappa(x, y)}{\kappa(x, y) \cdot (y^2 + 1)} = \frac{2x^2 - 1}{\kappa(x, y)} \qquad (\star\star)$$

Es gilt also

$$J_F(x, y)^{-1} = \frac{1}{\kappa(x, y)} \begin{pmatrix} 2x^2 - 1 & -2xy \\ -4xy & y^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man auch die Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix verwenden:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

und erhält wieder

$$J_F(x,y)^{-1} = \frac{1}{\kappa(x,y)} \begin{pmatrix} 2x^2-1 & -2xy \\ -4xy & y^2+1 \end{pmatrix}.$$

(d) Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren eine Näherung der Nullstelle. Wählen Sie dazu als Startwert $(0, 9/2)$ und führen Sie eine Iteration durch.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - J_F(x_0,y_0)^{-1}F(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \frac{4}{85}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{85}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{85} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{85} \\ 4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$