Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 1 25. April 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ $\overline{m}$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $i : M \hookrightarrow \overline{M}$ m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\overline{M}$ mit Riemannscher Metrik $g = i^*\overline{g}$.

   Ist $\overline{\varphi}$ eine Schnittkarte von M, so dass für alle $p \in M$, $m \leq i \leq \overline{m}$: $\partial_i^{\overline{\varphi}}|_p \in TM_p^{\perp}$,

   so gilt für $\varphi := \overline{\varphi}|_{M \cap U^{\overline{\varphi}}}$ und alle $p \in M \cap U^{\overline{\varphi}}$, $1 \leq i, j, k \leq m$

   $$^{\varphi}\Gamma_{ij}^k(p) = ^{\overline{\varphi}} \overline{\Gamma}_{ij}^k(p),$$

   wobei $^{\varphi}\Gamma_{ij}^k$ die Christoffelsymbole bzgl. g und $^{\overline{\varphi}}\overline{\Gamma}_{ij}^k$ die Christoffelsymbole bzgl. $\overline{g}$ bezeichnet.

2. Sei $\mathbb{T} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\theta, \sin\theta) \mid \varphi,\, \theta \in \mathbb{R}\} \subseteq S^3$ der *Clifford-Torus*. Bestimmen Sie die 2. Fundamentalform von $\mathbb{T}$ in S^3 und die Gaußkrümmung von $\mathbb{T}$.

3. Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \subseteq \overline{M}$ abgeschlossene, zusammenhängende totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von $\overline{M}$. Zeigen Sie: Ist $N \subseteq \overline{M}$ zusammenhängende totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von $\overline{M}$ und existiert ein Punkt $p \in M \cap N$, für den $T_pM = T_pN$ gilt, so ist N Teilmenge von M.

4. Bestimmen Sie alle totalgeodätischen Untermannigfaltigkeiten des hyperbolischen Raums im Lorentzmodell (M_L^m, g^L).

Abgabe: Montag, 2. Mai, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

Ein Tripel (E, M, p) heißt *k-dimensionals (glattes) Vektorbündel*, falls E, M C^∞ Mannigfaltigkeiten und $p : E \to M$ eine glatte Abbildung ist, so dass gilt:

1. für alle $x \in M$ ist $E_x = p^{-1}(x)$ mit einer k-dimensionalen Vektorraumstruktur versehen.

2. zu jedem $x \in M$ existiert eine Umgebung U und ein Homöomorphismus $\psi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

   wobei π_1 die Projektion auf die erste Komponente bezeichnet; und so dass für jeden Punkt $x \in M$ die Einschränkung $\psi_{|E_x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$ ein Vektorraumisomorphismus ist.

Aufgabe 1

Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemannansche Mannigfaltigkeit und $M \subseteq \overline{M}$ Untermannifaltigkeit. Zeigen Sie, dass das *Normalenbündel*

$$\pi : TM^\perp = \amalg_{p \in M} TM_p^\perp \to M,\ v \in TM_p^\perp \to p,$$

mit der von $T\overline{M}$ induzierten Vektorraumstruktur ein Vektorbündel ist.

Hinweis: Wenden Sie zunächst das Gram-Schmidtsche-Orthonormalisierungsverfahren auf die Koordinatenvektoren geeigneter Karten an, um lokal geeignete Vektorfelder zu erhalten, die an jedem Punkt den Normalenraum aufspannen.