Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 2 30. April 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. Sei $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ C^∞ und bezeichne graph(F) die m-dimensionale Untermannigfaltigkeit $\{(x, F(x)) \mid x \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$.

   Zeigen Sie: graph(F) versehen mit der induzierten Riemannschen Metrik des $(\mathbb{R}^{m+k}, \langle\ ,\ \rangle)$ ist vollständig.

2. Zeigen Sie: Ist (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $F : M \to M$ Isometrie, so ist die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(F) = \{p \in M \mid F(p) = p\}$ eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von M.

   Hinweis: Ist $p \in M$, so ist der Eigenraum von $F_*|_p$ zum Eigenwert 1 der Tangentialruam von $\mathrm{Fix}(F)$ an der Stelle p.

3. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

   (a) Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung U um p in M und V um 0_p in TM, so dass $(\pi \times \exp)|_V : V \to U \times U$ ein Diffeomorphismus ist.

   Anleitung: Zeigen Sie, dass $(\pi \times \exp)_*|_p : T(TM)_{0_p} \to TM_p \times TM_p$ surjektiv ist.

   (b) Zu jedem $p \in M$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U von p, so dass für alle $q \in U$ gilt: $\exp_q|_{B(0_q,\varepsilon)} : B(0_q, \varepsilon) \to B(q, \varepsilon)$ ist ein Diffeomorphismus.

4. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit.

   (a) Zeigen Sie: Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die Funktion

   $$f : B_\varepsilon(p) \to \mathbb{R}, \quad q \mapsto \frac{1}{2} d(p, q)^2$$

   konvex (vgl. Anwesenheitsaufgabe) ist, wobei $B_\varepsilon(p)$ den ε Ball um p bezeichnet.

   (b) Seien $A \subseteq B \subseteq M$. Dann heißt A **total konvex** in B , wenn jedes geodätische Segment $c : [0, 1] \to B$ mit Endpunkten in A vollständig in A enthalten ist.

   Zeigen Sie: Ist $f : U \subseteq M \to \mathbb{R}$ konvex, so ist jede Subniveaumenge $\{p \in U \mid f(p) < r\}$, $r \in \mathbb{R}$, total konvex in U.

   (c) Zeigen Sie: Zu jedem $p \in M$ existiert ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Sind $q, q' \in B(p, \delta)$, so existiert (bis auf Parametrisierung) genau eine Kürzeste c von q nach q' und c liegt in $B(p, \delta)$.

   Hinweis: Benutzen Sie die Aussagen von 3(b) und 4(b).

Abgabe: Montag, 7. Mai, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls für jede Geodätische $c : I \to M$ die Funktion $f \circ c$ konvex ist, d.h. wenn für alle $x, y \in I$ und $t \in [0, 1]$ gilt: $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

   Zeigen Sie: Ist f C^∞, so ist f genau dann konvex, wenn die Hesseform $\nabla^2 f|_p$ von f an jedem Punkt $p \in M$ positiv semidefinit ist.