Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 3 07. Mai 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld und $\alpha : [a,b]\times]-\varepsilon,\varepsilon[\to \Omega$ C^2. Erfüllt $y_\tau(t) := \alpha(t,\tau)$ die Differentialgleichung $\dot{y}_\tau(t) = F(y_\tau(t))$, so erfüllt $Y(t) := \frac{\partial\alpha}{\partial\tau}(t,0)$ die längs y_0 linearisierte Differentialgleichung

$$Y'(t) = DF(y_0(t))Y(t).$$

Außerdem existiert zu jeder Integralkurve $y : [a,b] \to \Omega$ von F und jedem $v \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $Y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ von $Y'(t) = DF(y(t))Y(t)$ mit $Y(a) = v$ und eine Variation $\alpha : [a,b]\times]-\varepsilon,\varepsilon[\to \Omega$ wie oben mit $\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}(t,0) = Y(t)$ und $\alpha(t,0) = y(t)$.

2. *Horosphäre.* Sei $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ der obere Halbraum mit der hyperbolischen Metrik $\langle\,,\rangle = g^{\text{hyp}} = \frac{1}{(x_n)^2} g^{\text{eukl}}$. Sei $M = \{x \in H^n \mid x_n = 1\}$.

   Zeigen Sie: M mit der induzierten Metrik ist flach. Berechnen Sie die 2. Fundamentalform h von M bezüglich (H^n, g^{hyp}). Berechnen Sie die Schnittkrümmung K^{H^n} des hyperbolischen Raums mit Hilfe der Gauß-Gleichung:

$$K^M(E) = K^{H^n}(E) + \langle h(u,u), h(v,v)\rangle - |h(u,v)|^2,$$

   falls $E \in G_2(TM)$ ist und u, v eine Orthonormalbasis von E bilden.

3. (a) Sei $(V, \langle\,,\rangle)$ ein m-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Sei $S^{m-1} = \{v \in V \mid |v| = 1\}$ die Einheitssphäre in V. Zeigen Sie:

$$\int_{S^{m-1}} b(v,v)\, d\operatorname{vol}^{S^{m-1}} = \frac{\operatorname{vol}(S^{m-1})}{m} \operatorname{spur}(b) = \omega_m \operatorname{spur}(b),$$

   wobei $d\operatorname{vol}^{S^{m-1}}$ das Volumenelement von S^{m-1} mit der von $(V, \langle\,,\rangle)$ induzierten Metrik ist und ω_m das Volumen der m-dimensionalen euklidischen Einheitskugel.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für eine beliebige ONB $\{e_1, \ldots, e_m\}$ von V die Integrale $\int_{S^{m-1}} \langle v, e_i\rangle^2 d\operatorname{vol}^{S^{m-1}}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ übereinstimmen.

   (b) Sei (M, g) eine m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$, $SM_p = \{v \in TM_p \mid |v| = 1\}$. Zeigen Sie:

   Für die Riccikrümmung Ric und die Skalarkrümmung S gilt:

$$S(p) = \frac{m}{\operatorname{vol}_{m-1}(S^{m-1})} \int_{SM_p} \operatorname{Ric}_p(v,v)\, d\operatorname{vol}^{SM_p}.$$

   (c) Für $v \in SM_p$ sei $S(v) = \{u \in SM_p \mid \langle u, v\rangle = 0\}$ die Einheitssphäre im orthogonalen Komplement von v in TM_p. Es gilt:

$$\operatorname{Ric}(v,v) = \frac{m-1}{\operatorname{vol}_{m-2}(S^{m-2})} \int_{S(v)} K(\operatorname{span}\{u,v\}) d\operatorname{vol}^{S(v)}(u).$$

4. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

   (a) Ist (M, g) zusammenhängend, vollständig und nicht kompakt, so gibt es zu jedem Punkt $p \in M$ einen Strahl (vgl. Anwesenheitsaufgabe) γ mit $\gamma(0) = p$.

   Anleitung: Zeigen Sie, dass eine Folge $p_i \in M$ mit $d(p, p_i) \to \infty$ existiert und konstruieren Sie einen Strahl als Limes von Kürzesten von p nach p_i.

   (b) Ist M kompakt, so existiert kein Strahl in (M, g).

Abgabe: Montag, 7. Mai, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

Definition: Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [0, \infty) \to M$ heißt Strahl, falls für alle $s \leq t \in [0, \infty)$ die Bedingung $d(c(s), c(t)) = L(c|_{[s,t]})$ gilt.
Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [0, \infty) \to M$ ein Strahl. Betrachten Sie zu $t \in [0, \infty)$ die Funktion:

$$b_t : M \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto d(x, c(t)) - t.$$

Zeigen Sie:

1. Für festes $p \in M$ ist $t \mapsto b_t(p)$ monoton fallend und beschränkt.

2. b_t ist Lipschitz mit Lipschitz-Konstante 1.

3. Durch $b : M \to \mathbb{R}$, $b(p) = \lim_{t\to\infty} b_t(p)$, wird eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante 1 definiert. Diese Funktion wird *Busemannfunktion* zum Strahl c genannt.

4. Sei $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ euklidisch, $\gamma(t) := t \cdot e_n$.

   Dann ist die Busemannfunktion $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Strahl γ gegeben durch $b(p) = -\langle p, e_n\rangle$ und es gilt $b^{-1}(0) = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$.

   $b^{-1}(0)$ heißt *Horosphäre.*

   Hinweis: Sie können die Abschätzung $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$ für $x \geq -1$ benutzen.