Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 4 14. Mai 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. Seien $(\widetilde{M}^m, \widetilde{g})$ und (M^m, g) vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F : \widetilde{M} \to M$ eine lokale Isometrie, d.h. $F^*g = \widetilde{g}$.

   Zeigen Sie: F ist eine Überlagerung.

   Bemerkung: Ist $\widetilde{M}$ einfachzusammenhängend, so gilt für die Untergruppe $\Gamma = \{\gamma \mid \gamma \in \mathrm{Iso}(\widetilde{M}, \widetilde{g}), \quad F \circ \gamma = F\}$ der Gruppe der Isometrien: $\widetilde{M}^m/\Gamma$ mit der von $\widetilde{g}$ induzierten Metrik ist isometrisch zu (M, g).

2. Sei (M^m, g) vollständige Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung K_0, $p \in M$ ein Punkt, (S^{m-1}, g_0) die Einheitssphäre im Tangentialraum von p bezüglich des Skalarprodukts g_p. Weiterhin sei $r : S^{m-1} \times]0, \infty[\to]0, \infty[$ definiert durch $r(v, \rho) = \rho$ und $F : S^{m-1} \times]0, \infty[\to M$, $(v, \rho) \mapsto \exp_p(\rho v)$.

   Zeigen Sie:
   $$F^*g = \begin{cases} dr^2 + \frac{1}{K_0}\sin^2(\sqrt{K_0}r)g_0, & \text{falls } K > 0 \\ dr^2 + r^2 g_0, & \text{falls } K = 0 \\ dr^2 + \frac{1}{-K_0}\sinh^2(\sqrt{-K_0}r)g_0, & \text{falls } K < 0 \end{cases}$$

3. Sei M^m glatte Mannigfaltigkeit und ∇ linearer Zusammenhang auf TM. Dann induziert ∇ einen linearen Zusammenhang auf T_sM (vgl. DG, Blatt 14, 3a).

   Zeigen Sie: Ist $T \in T_sM$, $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ eine glatte Kurve und $E_1, \ldots, E_m :]-\varepsilon, \varepsilon[\to TM$ ein paralleles Basisfeld von TM längs γ, so gilt:
   $$(\nabla_{\dot\gamma(t)}T)(E_{i_1}(t), \ldots, E_{i_s}(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_t T(E_{i_1}(t), \ldots, E_{i_s}(t)),$$
   wobei $i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, m\}$ beliebig.

   Folgern Sie daraus, dass
   $$\nabla_{\dot\gamma(t)}T = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_s \le m} T'_{i_1 \ldots i_s}(t) E^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes E^*_{i_s},$$
   wobei $E^*_1, \ldots, E^*_m$ die zu $E_1, \ldots, E_m$ dualen Basisfelder von T^*M längs γ und $T_{i_1 \ldots i_s}(t) = T(E_{i_1}(t), \ldots, E_{i_s}(t))$ bezeichnet.

4. *Jacobifelder auf Standardräumen II:*

   (a) Sei $(S^m_r, {}^r g)$ die Standardsphäre mit Radius $r > 0$ im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^{m+1}, g^{\mathrm{eukl}})$. Bestimmen Sie explizit die Jacobifelder längs der Geodätischen $c(t) = r(0 \ldots, 0, \sin(t), \cos(t))$.

   (b) Sei ${}^r M^m_L = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_{m+1} > 0, \quad \langle x, x\rangle_1 = -r\}$, $r > 0$, versehen mit der von $\langle\, , \rangle_1$ induzierten Metrik ${}^r g^L$. Bestimmen Sie explizit die Jacobifelder längs der Geodätischen $c(t) = r(0, \ldots, 0, \sinh(t), \cosh(t))$.

Abgabe: Montag, 28. Mai, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. *Jacobifelder auf Standardräumen I:*

   Sei $(\mathbb{R}^m, g^{\mathrm{eukl}})$ der euklidische Raum. Bestimmen Sie explizit die Jacobifelder längs der Geodätischen $c(t) = (0\ldots,\ 0,\ t)$.