Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 5 28. Mai 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. *(6 Punkte)* Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) heißt **lokal symmetrisch**, wenn der Riemannsche Krümmungstensor $R \in \Gamma(T_4M)$(in leicht missbräuchlicherweise Weise als 0,4-Tensor $R(u,v,w,z) = g(R(u,v)w,z)$ aufgefasst) parallel ist, d.h. $\nabla R \equiv 0$, vgl. Blatt 4 Aufgabe 3.
   Zeigen Sie:
   (a) (M,g) ist genau dann lokal symmetrisch, wenn für alle v, w_1, w_2, w_3, $w_4 \in TM_p$ gilt: $R_{c_v(t)}(P^{c_v}_{0,t}(w_1), P^{c_v}_{0,t}(w_2), P^{c_v}_{0,t}(w_3), P^{c_v}_{0,t}(w_4))$ ist konstant in t.
   (b) Sei (M,g) lokal symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existierte zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebungen U um p und eine Isometrie $F : U \to U$, so dass $F(p) = p$ und $F_*|_p = -\operatorname{id}_{TM_p}$ gilt. F heißt *Spiegelung an* p.
   (c) Sei (M,g) lokal symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existieren zu jedem Punkt $p \in M$ und $v \in TM_P$ mit $\overline{p} = c_V(1)$ Umgebungen U um p und V um $\overline{p}$ und eine Isometrie $F : U \to V$, so dass $F(p) = \overline{p}$ und $F_*|_p = P^{c_v}_{0,1}$.
   F heißt *Transvektion.*

2. *Killing-Vektorfelder. (6 Punkte)* Ein Vektorfeld X auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) heißt *Killing-Vektorfeld*, falls Φ^X_t für jedes $t \in \mathbb{R}$ isometrisch ist. (Dabei ist Φ^X der (lokale) Fluss von X.) Zeigen Sie:
   (a) Ist ein Vektorfeld $X(x) = (x, V(x))$ auf $\mathbb{R}^n$ (mit der üblichen euklidischen Metrik) ein Killing-Feld, so existiert eine schiefsymmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ und ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $V(x) = A\,x + v$.
   Hinweis: Benutzen Sie, dass jede Isometrie f des $\mathbb{R}^n$ die Gestalt $f(x) = B\,x + w$ hat mit $B \in O(n)$ und $w \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Die Einschränkung eines Killing-Vektorfelds auf eine Geodätische c ist ein Jacobifeld längs c.
   (c) Ein Vektorfeld X auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) ist genau dann ein Killing-Vektorfeld, wenn $\langle \nabla_v X|_p, w\rangle + \langle \nabla_w X|_p, v\rangle = 0$ für alle $p \in M$ und alle $v, w \in TM_p$ (d. h. die Bilinearform $(v,w) \mapsto \langle \nabla_v X|_p, w\rangle$ ist schiefsymmetrisch).

3. *Linsenräume. (4 Punkte)* Sei $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ und seien $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Sei Γ die Menge aller $h\colon S^3 \to S^3$ der Gestalt
$$h(z_1, z_1) = \left(e^{2\pi i \frac{n}{q}} z_1, e^{2\pi i \frac{np}{q}} z_2\right), \quad n \in \{0, \dots, q-1\}.$$
   Zeigen Sie:
   (a) Γ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ und operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf S^3.

(b) Zeigen Sie, dass die Standardmetrik eine Riemannsche Metrik konstanter Krümmung 1 auf S^3/Γ induziert.

Hinweis: Nutzen Sie dazu DG1, Blatt 10, Aufgabe 2a).

Die Mannigfaltigkeiten $L(p, q) := S^3/\Gamma$ heißen *Linsenräume.*

Abgabe: Montag, 4. Juni, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt **symmetrisch**, falls zu jedem Punkt $p \in M$ eine Isometrie $F : M \to M$ existiert, so dass gilt: $F(p) = p$ und $F_*(p) = -\operatorname{id}_{TM_p}$. Welche Beispiele für symmetrische Räume kennen Sie?