Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 6 04. Juni 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. *(4 Punkte)* Sei $f \in C^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ sei die Taylorentwicklung 3. Ordnung von $g_x(t) := f(tx)$ um $t = 0$ durch

$$g_x(t) = f(0) + ta(x) + \frac{t^2}{2}\, b(x) + \frac{t^3}{3!}\, c(x) + \mathcal{O}(t^4)$$

gegeben. Dann gilt $a(x) = Df(0)x$, $b(x) = (D^2 f)(0)(x, x)$ und $c(x) = (D^3 f)(0)(x, x, x)$ und es gilt

$$f(x) = f(0) + a(x) + \frac{1}{2}\, b(x) + \frac{1}{3!}\, c(x) + \mathcal{O}(|x|^4).$$

2. *(4 Punkte)* Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und ∇ ein linearer Zusammenhang auf TM.

Definiere $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(T^1_s M) \to \Gamma(T^1_s M)$ durch

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(X_1 \dots, X_s) = &\nabla_X (T(X_1, \dots, X_s)) - T(\nabla_X X_1, X_2, \dots, X_s) \\ &- \dots - T(X_1, \dots, X_{s-1}, \nabla_X X_s),\end{aligned}$$

wobei für alle $X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$

Zeigen Sie:

(a) Es gelten folgende Eigenschaften:

   i. $\nabla_Y T \in \Gamma(T^1_s M)$

   ii. $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(T^1_s M) \to \Gamma(T^1_s M)$ ist ein linearer Zusammenhang auf $T^1_s M$, d.h. für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $Y \in \Gamma(TM)$ und $T \in \Gamma(T_s M)$ gilt:

   α) $\nabla_{fY} T = f \nabla_Y T$.

   β) $\nabla_Y (fT) = Y(f)T + f \nabla_Y (T)$.

(b) Ist (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ Riemannscher linerare Zusammenhang auf M und $\widetilde{T} \in \Gamma(T_{s+1} M)$ für $T \in \Gamma(T^1_s M)$ definiert durch $\widetilde{T}(X_1, \dots, X_s, X) = g(T(X_1, \dots, X_s), X)$, so gilt für alle $X, Y, X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$:

$$\nabla_Y \widetilde{T}(X_1, \dots, X_s, X) = \widetilde{\nabla_Y T}(X_1, \dots, X_s, X).$$

3. *(8 Punkte)* Sei (M, g) pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Zeigen Sie, dass für die pseudo-Riemannsche Metrik g, der Riccikrümmung Ric und der Skalarkrümmung S gilt:

$$\operatorname{div}(\operatorname{Ric} - \frac{1}{2} S \cdot g) = 0, \qquad (\star)$$

wobei die Divergenz $\operatorname{div} T \in \Gamma(T_1^0 M)$ für einen symmetrischen Tensor $T \in \Gamma(T_2^0 M)$ und eine beliebige ONB $e_1, \dots e_m \in TM_p$, $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$, durch

$$(\operatorname{div} T)(v) := \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i (\nabla_{e_i} T)(e_i, v)$$

definiert ist. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie: Ist $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, so gilt: $\operatorname{div}(fg) = df$.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3b) von Blatt 14 (Differentialgeometrie I).

(b) Zeigen Sie: $dS = 2 \cdot \operatorname{div} \operatorname{Ric}$.
Hinweis: Führen Sie die Rechnung an einem festen Punkt $p \in M$ in normalen Koordinaten aus.

(c) Zeigen Sie Gleichung $(\star)$.

Abgabe: Montag, 11. Juni, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Auf einer glatten Mannigfaltigkeit M^4 sei ein symmetrischen Tensor $T \in \Gamma(T_2^0 M)$, der sogenannte Energie-Impuls-Tensor, gegeben. In der Relativitätstheorie wird nach Lorentzmetriken g auf M gesucht, die die Einsteingleichung

$$c \cdot T = \operatorname{Ric} - \frac{1}{2} S \cdot g + \Lambda \cdot g$$

lösen, wobei c eine Konstante, Ric die Riccikrümmung, S die Skalarkrümmung und Λ die sogenannte kosmologische Konstante bezeichnet. Eine *Vakuumlösung* dieser Gleichung erhält man, wenn man $T = 0$ betrachtet.

Zeigen Sie, dass für den Fall $\Lambda = 0$ die Metrik g genau dann Vakuumlösung der Einsteingleichung ist, falls (M, g) Ricci-flach ist, d.h. $\operatorname{Ric} \equiv 0$.