Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 7 11. Juni 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. *Transformationsformel*

   (a) Seien (M, g) und $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F : M \to \overline{M}$ ein Diffeomorphismus.
   Zeigen Sie, dass für jede integrierbare Funktion $\overline{f} : \overline{M} \to \mathbb{R}$ gilt:

   $$\int_{\overline{M}} \overline{f} \; \mathrm{dvol}^{\overline{g}} = \int_M \overline{f} \circ F \cdot \mathcal{J}F \; \mathrm{dvol}^{\mathrm{g}} .$$

   Hierbei ist $\mathcal{J}F(p) = (\det(F_*|_p^T \circ F_*|_p))^{\frac{1}{2}}$ und $F_*|_p^T : T\overline{M}_{F(p)} \to TM_p$ die Transponierte von $F_*|_p$ (d.h. für alle $v \in TM_p$, $\overline{v} \in T\overline{M}_{F(p)}$ gilt: $g_p(F_*|_p^T(\overline{v}), v) = \overline{g}_{F(p)}(\overline{v}, F_*|_p(v))$).

   (b) Sei $(\mathbb{R}^m, \langle\, , \,\rangle)$ euklidisch, $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| = 1\}$ und g die von $\langle\, , \,\rangle$ induzierte Metrik auf S^{m-1}.
   Folgern Sie aus Teil a) für eine beliebige Bilinearform $b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

   $$\int_{\{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq r\}} b(x, x) \, dx = \frac{r^{m+2}}{m+2} \int_{S^{m-1}} b(x, x) \, \mathrm{dvol}^{\mathrm{g}} .$$

2. Sei $H^m = H_1^m \subseteq \mathbb{R}_1^{m+1}$ das Lorentz-Modell des hyperbolischen Raums und $F \colon \mathbb{R}^+ \times S^{m-1} \to H_1^m$ definiert durch $F(s, v) := \cosh(s)\, e_0 + \sinh(s)\, v$. Berechnen Sie das m-dimensionale Volumen $\mathrm{vol}_m^{\mathrm{hyp}}\left(B(p, r)\right)$ des Balls $B(p, r) \subseteq H^m$ vom Radius r und das $(m-1)$-dimensionale Volumen $\mathrm{vol}_{m-1}^{\mathrm{hyp}}\left(\partial B(p, r)\right)$ der Sphäre $\partial B(p, r) = \{q \in H^m \mid d(p, q) = r\}$ vom Radius r, als Vielfaches des Volumens $\alpha_{m-1} := \mathrm{vol}_{m-1}^{g^{\text{sphär}}}(S^{m-1})$ der euklidischen Einheitssphäre. Zeigen Sie, dass

   $$\lim_{r \to \infty} \frac{\mathrm{vol}_m^{\mathrm{hyp}}\left(B(p, r)\right)}{\mathrm{vol}_{m-1}^{\mathrm{hyp}}\left(\partial B(p, r)\right)} = \frac{1}{m-1} ,$$

   und vergleichen Sie dies mit der Situation im euklidischen Raum.

3. Sei $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ der Schiefkörper der *Quaternionen* (vgl. Anwesenheitsaufgaben). Zeigen Sie:

   (a) Für $q \in S^3$ ist $\rho(q) \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\rho(q)x := qxq^{-1}$ eine orthogonale Abbildung des $\mathbb{R}^4$, die e_1 und damit den von e_2, e_3, e_4 aufgespannten Unterraum invariant läßt

   (b) ρ induziert einen Gruppenhomomorphismus $S^3 \to SO(3)$ mit Kern $\{\pm e_1\}$.

   (c) Bestimmen Sie die endlichen Untergruppen von S^3 mit Hilfe von ρ aus der Menge der endlichen Untergruppen von $SO(3)$, vgl. Satz 1.7 in “Geometrie” von Hans Knörrer, erschienen 2006 im Vieweg-Verlag, Wiesbaden.

4. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

   Ist (M, g) zweipunkthomogen, d.h. existiert zu je zwei Punktpaaren (p_1, p_2) und (q_1, q_2) mit gleichem Abstand $d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$ eine Isometrie $F : M \to M$ die p_i auf q_i, $i = 1, 2$, abbildet, so ist M eine Einsteinmannigfaltigkeit.

Abgabe: Montag, 18. Juni, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Bezeichne $\langle\, ,\, \rangle$ das Skalarprodukt und $\times$ das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$, so wird $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ mit folgenden Operationen zum Schiefkörper der *Quaternionen*:

$$(x, u) + (y, v) = (x + y, u + v) \tag{1}$$
$$(x, u) \cdot (y, v) = (xy - \langle u, v\rangle, xv + yu + u \times v) \tag{2}$$

   für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{R}^3$.

   Wir bezeichnen $\overline{(x, u)} = (x, -u)$ und definieren den Absolutbetrag durch $|q| = \sqrt{\overline{q} \cdot q}$.

   Zeigen Sie:

   (a) Das Inverse von $(x, u) \in \mathbb{H}$ ist durch

$$\left(\frac{x}{|(x, u)|}, -\frac{u}{|(x, u)|}\right)$$

   gegeben.

   (b) $l_p : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $q \mapsto q \cdot p$ und ${}^{-1} : \mathbb{H} \setminus \{0\} \to \mathbb{H} \setminus \{0\}$, $q \mapsto q^{-1}$ sind glatte Abbildungen.

   (c) Es gilt für alle $p, q \in \mathbb{H}$:

$$|p \cdot q| = |p| \cdot |q|.$$

   Folgern Sie daraus, dass die Multiplikation der Quaternionen auf $S^3 \subseteq \mathbb{H}$ eine (nicht-abelsche) Gruppenstruktur induziert.