Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 8 18. Juni 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a,b] \to M$ Geodätische. $V \in \Gamma(c^*(TM))$ heißt stückweise C^j, $j \geq 1$, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ von $[a,b]$ gibt, so dass $V_i|_{[t_{i-1},t_i]}$ C^j ist für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$. Für $1 \leq i \leq n-1$ setzen wir $\Delta_{t_i}(V) := V'(t_i^-) - V'(t_i^+)$, wobei $V'(t_i^-) = \lim_{t\uparrow t_i} V'(t)$, $V'(t_i^+) = \lim_{t\downarrow t_i} V'(t)$. Auf dem Vektorraum $\mathcal{V}_c^0 = \{V \in \Gamma(c^*TM) \mid \langle V, \dot{c}\rangle \equiv 0,\, V(a) = V(b) = 0,\, V \text{stetig und stw. } C^1\}$ definieren wir die quadratische Form

$$I_c(V) = \int_a^b |V'|^2 - \langle R(V(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), V(t)\rangle \, dt.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die zugehörige symmetrische Bilinearform die Form

   $$I_c(V,W) = \int_a^b \langle V', W'\rangle - \langle R(V,\dot{c})\dot{c}, W\rangle \, dt$$

   besitzt.

   (b) Zeigen Sie für V, $W \in \mathcal{V}_c^0$, V stw. C^2:

   $$I_c(V,W) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \Delta_{t_i}(V'), W(t_i)\rangle - \int_a^b \langle V'' + R(V,\dot{c})\dot{c}, W\rangle \, dt.$$

2. (a) Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien $c_1 : [a,b] \to M$, $c_2 : [a,b] \to M$ zwei nach Bogenlänge parametrisierte, minimale geodätische Segmente mit $c_1(a) = c_2(a)$, $c_1(b) = c_2(b)$ und $\dot{c}_1(a) \neq \dot{c}_2(a)$. Zeigen Sie: Für kein $\varepsilon > 0$ ist die Fortsetzung $c_i : [0, a+\varepsilon] \to M$, $i \in \{1,2\}$, ein minimales geodätisches Segment.

   (b) Sei $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \,\rangle)$ der 2-dimensionale euklidische Raum und $\Gamma := \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f(x) = x + l \cdot e_1,\, l \in \mathbb{Z}\}$. Betrachten Sie auf dem Zylinder $Z = \mathbb{R}^2/\Gamma$ mit der induzierten Metrik g (vgl. DGI, Blatt 10, Aufgabe 2a) alle nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen c, die von einem festen Punkt $p \in Z$ starten. Bestimmen Sie abhängig von der Richtung das maximale Intervall I, für das $c|_I$ minimal ist.

3. Auf einem metrischen Raum (M,d) wird die Länge einer stetigen Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ durch

$$L(\gamma) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n} d(c(t_{i-1}), c(t_i)) \mid n \in \mathbb{N},\ a = t_0 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n = b \text{ Zerlegung von}[a,b]\right\}$$

   definiert. Zeigen Sie:

   (a) Ist (M,d) wegzusammenhängender metrischer Raum, so wird durch $\overline{d} = \overline{d} : M \times M \to \mathbb{R}_{>0}$,

   $$\overline{d}(p,q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \to M \text{ stetig}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$$

   eine Metrik auf M definiert.

(b) Ist (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und d^g die von g induzierte Distanzfunktion, vgl. Definition vor (7.10), so stimmt die in Aufgabenteil a) definierte intrinsische Metrik $\overline{d^g}$ mit d^g überein.

(c) Ist (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und d die von g induzierte Distanzfunktion und ist $\gamma : [0, L] \to M$ eine stetige Kurve, so dass für jedes $s \in [0, L]$ gilt, dass $d(\gamma(0), \gamma(s)) = s$, so ist γ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische.

4. Sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\alpha \in \pi_1(M, p)$ nicht triviales Element der Fundamentalgruppe. Zeigen Sie, dass eine geodätische Schleife $c : [0, 1] \to M$ am Punkt p, d.h. $c(0) = c(1) = p$, existiert, so dass $[c] = \alpha$ und $L(c) = \min\{L(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$.

   Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass zu jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M}, \overline{g})$ und eine frei und eigentlich diskontinuierlich operierende Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{Iso}(\overline{M})$ existiert, so dass M isometrisch ist zu $\overline{M}/\Gamma$ versehen mit der induzierten Metrik.

Abgabe: Montag, 25. Juni, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Seien $(\overline{M}, \overline{g})$ und (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, $\overline{M}$ einfach zusammenhängend und $\pi : \overline{M} \to M$ lokale Isometrie ($\overline{M}$ ist dann die universelle Überlagerung von M). Zeigen Sie: Ist $f : ([0, 1]^n, 0) \to (M, p)$, $n \geq 1$, stetige Abbildung von Paaren in M, d.h. $f : [0, 1]^n \to M$ stetig und $f(0) = p$, so existiert zu jedem Punkt $\overline{p} \in \overline{M}$ mit $\pi(\overline{p}) = p$ genau eine setige Abbildung $\overline{f} : ([0, 1]^n, 0) \to (\overline{M}, \overline{p})$, so dass $\pi \circ \overline{f} = f$.