Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“
im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 9 25. Juni 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. *(2 Punkte)* Sei $c : \mathbb{R} \to S^m$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische auf der Sphäre $S^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ vom Radius 1 mit der vom $\mathbb{R}^{m+1}$ induzierten Metrik. Zeigen Sie: Die reellen Zahlen s und t sind genau dann konjugiert längs c, wenn $0 < |t-s| \in \pi\mathbb{N}$.

2. Sei $c : I \to M$ Geodätische und $s, t \in I$, $s < t$. Dann ist
$$\mathcal{J}^0_{s,t} = \{Y \mid Y \text{ Jacobifeld längs } c,\, Y(s) = 0,\, Y(t) = 0\}$$
ein Untervektorraum von $\mathcal{V}_c|_{[s,t]}$. Ist $\dim \mathcal{J}^0_{s,t} > 0$, so sind s,t konjugiert längs c und $\dim \mathcal{J}^0_{s,t}$ heißt dann die Vielfachheit des konjugierten Punktepaares s, t.
   (a) Berechnen Sie die Vielfachheiten der konjugierten Punktepaare von (nach Bogenlänge parametrisierten) Geodätischen auf der Standardsphäre S^m, vgl. Aufgabe 1.
   (b) Sei $p = c(s)$, $v = \dot{c}(s)$. Zeigen Sie, dass $\dim \mathcal{J}^0_{s,t} = \dim(\ker(\exp_p)_{*(t-s)v}) \leq m-1$ gilt.

3. Sei $\alpha : [a,b] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ geodätische Variation, d.h. für alle $\tau \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ ist $c_\tau(t) := \alpha(t,\tau)$ Geodätische. Es gelte für alle $\tau \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:
$$c_\tau(a) = c_0(a),\; c_\tau(b) = c_a(b) \text{ und } \frac{\partial}{\partial\tau}\dot{c}_\tau(0) \neq 0.$$
Zeigen Sie: Für alle $\tau \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ sind a und b konjugiert längs c und es gilt $L(c_\tau) = L(c_0)$.

4. *Fokalpunkte (6 Punkte):* Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \subseteq \overline{M}$ Untermannigfaltigkeit. Die normale Exponentialabbildung $\exp_{TM^\perp} : TM^\perp \to \overline{M}$ der Untermannigfaltigkeit M ist durch $\exp_{TM^\perp} := \overline{\exp}|_{TM^\perp}$ definiert (d.h. ist $v \in TM_p^\perp$, so ist $\exp_{TM^\perp}(tv) = c_v(t)$ die Geodätische in $\overline{M}$, die zur Zeit $t = 0$ in $p \in M$ mit Tangentialvektor $\dot{c}(0) = v \in TM_p^\perp$ senkrecht zu M startet.)
   Ein Punkt $q \in \overline{M}$ heißt *Fokalpunkt* von M, wenn es ein $v \in TM^\perp$ gibt, sodass $q = \exp_{TM^\perp}(v)$ und $(\exp_{TM^\perp})_{*v}$ singulär ist.
   (a) Ist M Hyperfläche in $(\overline{M}, \overline{g})$ mit Einheitsnormalenvektorfeld N, so ist $\exp_{TM^\perp}(tN(p))$ für $t \neq 0$ Fokalpunkt von M, wenn es ein Jacobifeld $Y \neq 0$ längs $c(s) = \exp_{TM^\perp}(sN(p))$ gibt für das $Y(0) \in TM_p$, $Y(t) = 0$ und
$$Y'(0) = -S_p(Y(0)).$$
   (b) Sei $(\overline{M}, \overline{g}) = \mathbb{E}^m$, also $\overline{\exp}_p(p, v) = p + v$, und $M \subseteq \mathbb{E}^m$ Hyperfläche mit Einheitsnormalenfeld $N \in \Gamma(TM^\perp)$.
   Zeigen Sie: Ist $p \in M$, so ist $\exp_{TM^\perp}(p, tN(p)) = p + tN(p)$ Fokalpunkt von M, wenn $\frac{1}{t}$ eine Hauptkrümmung (bzgl. N), d.h. Eigenwert der Weingartenabbildung (vgl. Anwesenheitsaufgabe), von M in p ist.

Abgabe: Montag, 2. Juli, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $(\overline{M}, \langle\, ,\, \rangle)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \subseteq \overline{M}$ eine Hyperfläche mit lokalem Einheitsnormalenvektorfeld N um $p \in M$. Sei weiterhin $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\alpha(t, \tau) = \overline{\exp}_{\gamma(\tau)}(tN(\gamma(\tau)))$ geodätische Variation.

   Zeigen Sie für das Jacobifeld $Y(t) := \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}|_{(t,0)}$, dass $Y(0) \in TM_p$ und $Y'(0) \in TM_p$.

   Die 2. Fundamentalform h von M in $\overline{M}$ definiert auf TM_p (in Abhängigkeit von der Wahl des Normalenfeldes) eine lineare Abbildung $S_p : TM_p \to TM_p$ durch die Bedingung $\langle S_p(v), w \rangle = \langle h_p(v, w), N(p) \rangle$. Diese Abbildung heißt *Weingartenabbildung bzgl. $N(p)$*.

   Zeigen Sie, dass $Y'(0) = -S_p(Y(0))$ gilt.