Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 10 — 2. Juli 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. *(4 Punkte)* Sei (M, g) einfach zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositiver Schnittkrümmung und $p \in M$ ein Punkt.

   Zeigen Sie, dass die quadratische Abstandsfunktion $f_p : M \to \mathbb{R}$, $f_p(x) = d(p, x)^2$, eine konvexe Funktion ist, vgl. Anwesenheitsaufgabe 1 auf Blatt 2.

2. *Das Energiefunktional (6 Punkte)* Sei (M, g) eine zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p,\ q \in M$ und $\Omega = \Omega(p, q) = \{c : [0, 1] \to M \mid c \text{ stetig und stw. } C^\infty,\ c(0) = p,\ c(1) = q\}$, vgl. auch Aufg. 1 auf Blatt 8.

   Die Energie einer Kurve $c \in \Omega$ von a bis b mit $0 \leq a < b \leq 1$ wird definiert durch
$$E_a^b(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)|^2\, dt.$$

   Zeigen Sie:

   (a) Für alle $c \in \Omega$ gilt: $\big(L(c|_{[a,b]})\big)^2 \leq E_a^b(c) \cdot (b - a)$ mit „ = “ genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

   Hinweis: Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

   (b) Folgern Sie aus (2a), dass die Funktion $E := E_0^1 : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann an der Stelle $\gamma \in \Omega$ ihr Minimum annimmt, wenn γ minimale Geodätische von p nach q ist.

   (c) Sei $c \in \Omega$ und $\alpha : [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ stetige Variation von $\alpha_0 = c$, so dass es eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ gibt, für die α auf $[t_{i-1}, t_i] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$, C^∞ ist und $\alpha(0, \tau) = p$, $\alpha(1, \tau) = q$ für alle $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt. Dann gilt:
$$\frac{dE(\alpha_\tau)}{d\tau}|_{\tau=0} = -2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}(t_i, 0), \Delta_{t_i}\dot{c}\rangle + \int_0^1 \langle \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}(t, 0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\dot{c}(t)\rangle\, dt\right),$$
   wobei $\Delta_{t_i}(\dot{c}) = \dot{c}(t_i^+) - \dot{c}(t_i^-)$ mit $\dot{c}(t_i^+) = \lim_{t\downarrow t_i} \dot{c}(t)$ und $\dot{c}(t_i^-) = \lim_{t\uparrow t_i} \dot{c}(t)$ definiert ist.

   (d) Folgern Sie aus (2c), dass $\gamma \in \Omega$ genau dann kritischer Punkt von E ist, d.h. $\frac{dE(\alpha_\tau)}{d\tau}|_{\tau=0} = 0$ für jede Variation wie oben, wenn γ Geodätische.

3. *Endlich dimensionale Approximation des Kurvenraums (6 Punkte)*

   Sei (M, g) zusammenhängende, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p,\ q \in M$, Ω und E wie in Aufgabe 2 definiert. Für $e > 0$ bezeichne $\Omega^e = \{c \in \Omega \mid E(c) < e\}$. Wir betrachten Ω als metrischen Raum mit der von d^g induzierten Metrik $d(c_1, c_2) = \max\{d^g(c_1(t), c_2(t)) \mid t \in [0, 1]\}$.

(a) Zeigen Sie: Zu jedem $e > 0$ existiert eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, so dass für alle $c \in \Omega^e$ eindeutig bestimmte kürzeste Geodätische von $c(t_{i-1})$ nach $c(t_i)$, $i = 1, \dots n$ existieren.

Hinweis: Verwenden Sie die Anwesenheitsaufgabe und Aufgabe (2a).

(b) Für $e > 0$ und eine beliebige Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ wie in (3a) bezeichne $\Omega^e(t_0, \dots, t_n) := \{c \in \Omega^e \mid c|_{[t_{i-1}, t_i]} \text{ Geodätische }, i = 1, \dots n\} \subseteq \Omega^e$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\phi = \phi^e_{t_1, \dots, t_{n-1}} : \Omega^e(t_0, \dots, t_n) \to \underbrace{M \times \cdots \times M}_{(n-1)-\text{mal}}, \quad c \mapsto (c(t_1), \dots, c(t_{n-1}))$$

ist ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von $M \times \cdots \times M$. Machen Sie sich klar, dass dadurch $\Omega^e(t_0, \dots, t_n)$ mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit versehen werden kann.

(c) Bezeichne für $e > 0$ und eine feste Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ das Bild von $\Omega^e(t_0, \dots, t_n)$ unter $\phi = \phi^e_{t_1, \dots, t_{n-1}}$ mit P.
Zeigen Sie, dass die Aleitung des Energiefunktionals

$$\overline{E} : P \to \mathbb{R}, \quad \overline{E}(p_1, \dots, p_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^g(p_i, p_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}$$

für $(v_1, \dots, v_n) \in TP_{(p_1, \dots, p_n)}$ gegeben ist durch

$$\overline{E}_{*(p_1, \dots, p_n)}(v_1, \dots, v_n) = -\sum_{i=1}^{n-1} \langle v_i, \Delta_{t_i} \dot{c} \rangle,$$

wobei $c = \phi^{-1}(p_1, \dots, p_n) \in \Omega^e(t_0, \dots, t_n)$ und $\Delta_{t_i} \dot{c}$ wie in Aufgabe 2 definiert ist.
Hinweis: $\overline{E} \circ \phi$ stimmt mit $E|\Omega^e(t_0, \dots, t_n)$ überein.

Abgabe: Montag, 9. Juli, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Injektivitätsradius $\mathrm{inj}(p)$ an einem Punkt $p \in M$ ist definiert durch:

$$\mathrm{inj}(p) = \sup\{r > 0 \mid \exp|_{B(0_p, r)} : B(0_p, r) \to B(p, r) \text{ ist Diffeomorphismus } \}.$$

Zeigen Sie: Ist M kompakt, so ist $\mathrm{inj}(M) = \inf\{\mathrm{inj}(p) \mid p \in M\} > 0$.