Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 11 — 9. Juli 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.

1. *(6 Punkte)* Ist $k > 0$ und (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq k$, $r_0 := \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ und ist $\exp_p |B(0_p, r_0)$ injektiv, so ist die Abstandsfunktion von p, $f(x) := d(p, x)$, auf $B(p, r_0)$ konvex.

   Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von (17.1) vor.

2. *(6 Punkte)*

   (a) Sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine glatte Funktion und $a(0) > 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

   $$\varphi'' + a\varphi = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0 \tag{1}$$

   mindestens zwei Nullstellen $s_- < 0 < s_+$ besitzt.

   (b) Sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K > 0$ und sei $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische.

   Zeigen Sie: Es existieren $s_1 < s_2$, so dass s_1 und s_2 längs c konjugiert sind.

   Hinweis: Wählen Sie ein normiertes, paralleles Vektorfeld V längs c und eine glatte Funktion $\overline{a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $0 \leq \overline{a}(t) \leq K(\text{span}\{V(t), \dot{c}(t)\}$ mit strikten Ungleichungen an der Stelle 0 gilt. Zeigen Sie, dass $I_c(X, X) < 0$, falls $X = \varphi V$, wobei φ die Lösung von (1) für $a = \overline{a}$ bezeichnet.

3. *Morselemma (4 Punkte)* Zeigen Sie: Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ und nicht ausgearteter Hesseform $D^2 f(0)$ von Index k, so existiert eine Karte ϕ um p, so dass

   $$f \circ \phi^{-1}(x) = f(0) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{m} x_i^2.$$

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass gilt:

   $$f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^1 \int_0^1 \partial_i \partial_j f(tsx)\, ds\, dt\, x_i x_j.$$

Abgabe: Montag, 16. Juli, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Zeigen Sie: Ist $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_m) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Dann existiert ein Umgebung U von D im Vektorraum der symmetrischen $(m \times m)$-Matrizen und eine C^∞-Abbildung $P : U \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so dass gilt:

$$P(D) = E_m, \quad \text{und} \quad \forall B \in U : P(B)^T B P(B) = D.$$