# Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im SoSe 2013 bei Prof. V. Bangert

Bonusblatt 16. Juli 2013

*Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen an.*

1. *(6 Zusatzpunkte)* Sei $(M, g)$ vollständige Riemmansche Mannigfaltigkeit.

   (a) Zeigen Sie: Ist $(M, g)$ symmetrischer Raum, so existiert zu jedem Tangentialvektor eine Transvektion (vgl. Blatt 5, 1c).

   *Hinweis:* Stellen Sie die Transvektion als Verknüpfung zweier Spiegelungen dar und bestimmen Sie das Verhalten der parallelen Vektorfelder unter deren Ableitungen.

   (b) Zeigen Sie: Ist $(M, g)$ symmetrischer Raum, so ist der Riemannsche Krümmungstensor parallel.

2. *(4 Zusatzpunkte)* Sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit parallelem Riemannschem Krümmungstensor und $c : I \to M$ Geodätische auf $M$.

   (a) Zeigen Sie, dass längs $c$ parallele, orthonormale Basisfelder $E_1, \ldots, E_m = \dot{c}$ existieren, so dass für jedes $t \in I$ durch $E_1(t), \ldots, E_m(t)$ eine ONB von Eigenvektoren von $w \mapsto R(\,\cdot\,, \dot{c}(t))\dot{c}(t)$ gegeben ist.

   (b) Bestimmen Sie für ein beliebiges Jacobifeld $Y$ längs $c$ die Koeffizienten bezüglich $E_1, \ldots, E_m = \dot{c}$.

   *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass die Schnittkrümmung $K(\operatorname{span}\{\dot{c}(t), E_i(t)\})$ konstant ist für $i = 1, \ldots, m$.

3. *(6 Zusatzpunkte)* Sei 0 der einzige kritische Wert von $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$und seien die Subniveaumengen $f^{-1}((-\infty, a])$ kompakt für jedes $a \in \mathbb{R}$. Sei $U$ eine Umgebung der Menge der kritischen Punkte $\operatorname{Crit}(f) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid Df(x) = 0\}$.

   (a) Auf $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{Crit}(f)$ wird durch $X = -\dfrac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|^2}$ ein Vektorfeld definiert. Zeigen Sie: Ist $c : [0, a] \to \mathbb{R}^m \setminus \operatorname{Crit}(f)$ eine Flusslinie von $X$, so gilt: $f \circ c(t) = f(c(0)) - t$.

   (b) Es existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ mit kompaktem Abschluss in $U$ von $\operatorname{Crit}(f)$, so dass für jede Flusslinie $c : [a, b] \to \mathbb{R}^m \setminus \operatorname{Crit}(f)$ von $X$ mit $c(a) \in V$ und $c(b) \notin U$ gilt, dass $f(c(b)) < 0$.

   (c) Zeigen Sie, dass jede Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ mit Endpunkten $\gamma(0), \gamma(1) \in f^{-1}((-\infty, 0))$ durch eine Homotopie mit festen Endpunkten zu einer Kurve $\overline{\gamma} : I \to f^{-1}((-\infty, 0)) \cup U$ deformiert werden kann.

Abgabe: Montag, 23. Juli, bis 12 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1