1. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Montag, den 22.04.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Folgen und

$$F = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Zu je zwei Zahlen $b, c \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ mit $a_0 = b$ und $a_1 = c$.

(b) Es gibt Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$, so dass

$$(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \qquad (y^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F.$$

(c) Die Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist ein zwei dimensionaler Unterraum mit Basis $((x^n)_{n\in\mathbb{N}}, (y^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

(d) Bestimmen Sie anschließend $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so dass für die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_0 = f_1 = 1$ gerade

$$f_n = \lambda x^n + \mu y^n$$

gilt, und berechnen Sie f_{10} (ggf. mit Taschenrechner), ohne vorher $f_2, \dots, f_9$ berechnet zu haben.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$. Jemanden behauptet, diese Matrix habe die Eigenwerte 1 und 3.

(a) Überprüfen Sie diese Aussage, indem Sie versuchen, die zugehörigen Eigenvektoren zu bestimmen.

(b) Welche Eigenwerte hat A wirklich?

Aufgabe 3: Es sei $\Bbbk$ ein Körper, V, W zwei n-dimensionale $\Bbbk$-Vektorräume und $F \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$, $G \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(W)$ Endomorphismen. Der Endomorphismus F habe die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Bbbk$. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Isomorphismus $\Phi : V \to W$ mit $\Phi \circ F = G \circ \Phi$ gibt, wenn G auch die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat.

Aufgabe 4: Es sei $\Bbbk$ ein Schiefkörper, V ein Rechts-$\Bbbk$-Vektorraum und $F \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Es sei $v \in V \setminus \{0\}$, $\lambda \in \Bbbk$ mit $F(v) = v.\lambda$, und es sei $a \in \Bbbk^\times = \Bbbk \setminus \{0\}$. Dann existiert $\mu \in \Bbbk$ mit $F(v.a) = (v.a).\mu$.

(b) Es sei $U \subset V$ ein eindimensionaler Unterraum. Dann gilt $F(U) \subset U$ genau dann, wenn $v \in U \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \Bbbk$ existieren, so dass $F(v) = v.\lambda$.