2. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe: Montag, den 29.04.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es sei $\Bbbk$ ein Schiefkörper und V ein Rechts-$\Bbbk$-Vektorraum. Es sei I eine Menge und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Unterräumen von V. Betrachte

$$\coprod_{i\in I} U_i \overset{\text{def}}{=} \left\{ (u_i)_{i\in I} \in V^{(I)} \;\middle|\; u_i \in U_i \text{ für alle } i \in I, \quad u_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

und

$$\sum_{i\in I} U_i \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i\in I} u_i \;\middle|\; u_i \in U_i \text{ für alle } i \in I, \quad u_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \right\}.$$

Zeigen Sie: die natürliche Abbildung

$$\Phi : \coprod_{i\in I} U_i \to \sum_{i\in I} U_i \quad \text{mit} \quad \Phi((u_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} u_i$$

ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die Summe direkt ist, das heißt, wenn

$$U_i \cap \sum_{j\in I\setminus\{i\}} U_j = \{0_V\} \quad \text{für alle } i \in I.$$

Aufgabe 2: Formulieren und beweisen Sie das Analogon zum Satz 2.18 (Euklidischer Algorithmus) für den Polynomring $\Bbbk[X]$ über einen Körper $\Bbbk$. Ersetzen Sie dabei die Bedingung $a_i < a_{i+1}$ durch $\deg(a_i) < \deg(a_{i+1})$, und benutzen Sie Satz 5.13.

Aufgabe 3: Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler $S \in \mathbb{Q}[X]$ von

$$P(X) = X^5 + X^3 + X^2 - 6X + 3 \quad \text{und} \quad Q(X) = X^4 - X^3 + 4X^2 - 3X + 3.$$

Zur Probe bestimmen Sie anschließend T, $U \in \mathbb{Q}[X]$, so dass

$$P(X) = S(X) \cdot T(X) \quad \text{und} \quad Q(X) = S(X) \cdot U(X).$$

Aufgabe 4: Es sei V ein endlichdimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum, $F \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ und $v \in V$. Für $i \in \mathbb{N}$ schreibe

$$F^i(v) = (\underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{i\text{-mal}})(v),$$

inbesondere $F^0(v) = v$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt $k \in \mathbb{N}$, so dass die Vektoren $v, F(v), \ldots, F^{k-1}(v)$ linear unabhähngig sind, $v, F(v), \ldots, F^k(v)$ jedoch nicht.

(b) Folgern Sie, dass der Unterraum

$$U = \left\langle v, F(v), \ldots, F^{k-1}(v) \right\rangle$$

die Basis $\big(v, F(v), \ldots, F^{k-1}(v)\big)$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass $F(U) \subset U$ gilt, und stellen Sie $F|_U \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(U)$ bezüglich der Basis aus (b) als Matrix dar.