3. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe: Montag, den 06.05.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es sei $\Bbbk$ ein Körper und $x_0, \dots, x_n$ gegeben mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Es sei

$$P_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i} \in \Bbbk[X].$$

(a) Berechnen Sie $P_j(x_i)$ für alle Paare $(i, j) \in \{0, \dots, n\}^2$.

(b) Zeigen Sie: die Polynome $P \in \Bbbk[X]$ mit $\deg P \leq n$ bilden einen $\Bbbk$-Vektorraum W.

(c) Die Polynome $P_0, \dots, P_n$ bilden eine Basis von W.

(d) Sei $y_0, \dots, y_n \in \Bbbk$. Dann existiert genau ein $P \in W$ mit $P(x_i) = y_i$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$.

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -5 & -7 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von χ_A die Eigenwerten von A und ihre algebraischen Vielfachheiten.

(c) Bestimmen Sie (zum Beispiel mit dem Gauß-Verfahren) Eigenvektoren zu den Eigenwerten, und geben Sie die geometrischen Vielfachheiten an. Machen Sie für jeden Eigenvektor $v \in \mathbb{Q}^4$ die Probe, indem Sie $A \cdot v$ ausrechnen.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Rechnen Sie nach, dass $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) = \chi_C(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerten [0] und [1]. Welche Minimalpolynome haben die Matrizen?

Aufgabe 4: Es sei $\Bbbk$ ein Körper und $A \in M_n(\Bbbk)$ eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -c_n \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & -c_3 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\chi_A(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \ldots + c_n.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mu_A = \chi_A$, indem Sie $P(A) \in M_n(\Bbbk)$ auf e_1 anwenden, wobei $P \in \Bbbk[X]$ ein Polynom mit $\deg P < n$ sei.

(c) Sei V ein n-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. Folgen Sie aus (a): wenn es zwei Vektoren $v, w \in V$ gibt, so dass

$$V = \left\langle v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v) \right\rangle = \left\langle w, F(w), \ldots, F^{n-1}(w) \right\rangle,$$

dann gibt es ein Automorphismus $G \in \mathrm{Aut}_{\Bbbk}(V)$ mit $G \circ F = F \circ G$ und $G(v) = w$.