5. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Montag, den 27.05.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:

(a) Seien $I, J \subset R$ Ideale, dann ist auch $I \cap J$ ein Ideal.

(b) Es seien $I_i \subset R$ für alle $i \in \mathbb{N}$ Ideale mit $I_i \subset I_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$. Dann ist auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ ein Ideal.

Aufgabe 2: Es sei R ein Hauptidealring und $a, b \in R \setminus \{0\}$. Präzisieren und beweisen Sie die folgende Aussage:

> Sei $c \in R$ Erzeuger des Ideals $(a) \cap (b)$, dann ist c ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b

Hinweis: Gehen Sie wie Bemerkung 6.9 vor.

Aufgabe 3: Sei $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge
$$R = \{m + in \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$
bildet ein Unterring.

(b) Einsetzen von i liefert einen Ringhomomorphismus $F\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{C}$.

(c) Es gilt $\ker F = (X^2 + 1) \subset \mathbb{Z}[X]$ und $R \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$.

Aufgabe 4: Es sei $P \in \Bbbk[X]$ ein Polynom von Grad $d \geq 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Es sei $b_{ij} = [P(X)^{i-1} \cdot X^{j-1}] \in \Bbbk[X]/(P^k)$ für $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq d$.

(a) Zeigen Sie: $(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1d}, b_{21}, \ldots, b_{kd})$ ist eine Basis von $\Bbbk[X]/(P^k)$ aufgefasst als $\Bbbk$-Vektorraum.

(b) Bestimmen Sie die Matrix A des Endomorphismus $F \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk[X]/(P^k))$ mit $F([Q]) = [X \cdot Q]$ für alle $Q \in \Bbbk[X]$ bezüglich der Basis aus (a).

(c) Warum sind die Unterräume $U_i = \langle b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{kd} \rangle$ invariant unter F für $2 \leq i \leq k$, und was bedeutet das für die Matrix A?