6. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Montag, den 3.06.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es sei R ein Hauptidealring und $0 \neq a \in R \setminus R^\times$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) a ist ein Primelement;

(b) $R/(a)$ ist ein Körper;

(c) $R/(a)$ ist ein Integritätsbereich.

Aufgabe 2: Es sei V ein n-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum und $F \in \operatorname{End}_\Bbbk V$. Wir nehmen an, dass

$$\chi_F(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Bbbk$, und dass eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ aus Eigenvektoren zu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ existiert. Zeigen Sie

(a) Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

(b) Wenn alle λ_i paarweise verschiedene sind, ist $v = v_1 + \dots + v_n$ ein zyklischer Erzeuger von (V, F).

Aufgabe 3: Es sei $\lambda \in \Bbbk$, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(\Bbbk)$ eine Matrix der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4: Zu jeder Primzahl $p \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ definieren wir eine Abbildung $|\cdot|_p \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ durch

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p = \begin{cases} p^{\mu_p(b)-\mu_p(a)} & \text{falls } a \neq 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $\left|\frac{a}{b}\right|_p$ hängt nicht von der Darstellung $\frac{a}{b}$ ab.

(b) Für alle $u, v \in \mathbb{Q}$ gilt $|uv|_p = |u|_p \cdot |v|_p$.

(c) Für alle $u, v \in \mathbb{Q}$ gilt

$$|u + v|_p \leq \max\left(|u|_p, |v|_p\right)$$

und aus „<“ folgt bereits $|u|_p = |v|_p$.

(d) Es sei $|\cdot|$ der gewöhnliche Absolutbetrag. Dann gilt für alle $u \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, dass

$$1 = |u| \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})} |u|_p.$$