7. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Montag, den 10.06.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\begin{aligned} n &\equiv 3 \mod 10 \\ n &\equiv 27 \mod 33 \\ n &\equiv 18 \mod 49 \end{aligned}$$

Welches ist die kleinste positive Zahl mit dieser Eigenschaft?
Hinweis: Überlegen Sie zunächst, welchen Rest n modulo 330 haben muss. Bestimmen Sie danach n. Gehen Sie vor wie im Beweis des chinesischen Restsatzes.

Aufgabe 2: Es seien $P_1 = X^2 - 2X + 2$, $P_2 = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Zeigen Sie, dass P_1 und P_2 teilerfremd sind.

(b) Bestimmen Sie ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$, so dass

$$\begin{aligned} P &\equiv -3 \mod P_1 \\ P &\equiv -2X + 2 \mod P_2. \end{aligned}$$

(c) Welches ist das Polynom vom kleinsten Grad, das die Bedingungen in (b) erfüllt?

Aufgabe 3: Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein reelles Polynom.

(a) Erläutern Sie, warum es möglich ist, komplexe Zahlen in P einzusetzen.

(b) Zeigen Sie: wenn $P(z) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}$, dann folgt $P(\bar{z}) = 0$.

(c) Es sei $P(z) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $Q(X) = (X - z)(X - \bar{z}) \in \mathbb{R}[X]$ und dass $Q \mid P$.

(d) Benutzen Sie den Fundamentalsatz 1.61 der Algebra, um zu zeigen, dass die Menge der normierten, primen reellen Polynome gegeben wird durch

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}[X]) = \{X - \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{X^2 - aX + b \mid a, b \in \mathbb{R},\ 4b > a^2\}.$$

Aufgabe 4: Die folgenden abelschen Gruppe haben alle jeweils 24 Elemente:

$$G_1 = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, \qquad G_2 = \mathbb{Z}/8Z \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},$$
$$G_3 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \qquad G_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$
$$G_5 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \qquad G_6 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},$$
$$G_7 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Welche von ihnen sind isomorph, welche nicht?

Hinweis: Nach Beispiel 6.12 sind abelsche Gruppen das gleiche wie $\mathbb{Z}$-Module. Benutzen Sie den chinesischen Restsatz 6.27 und den Satz 6.13 über invariante Faktoren, um das Problem zu lösen.