8. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Montag, den 17.06.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$$

Da $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ können wir A auch als Matrix über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ aufffassen.

(a) Begründen Sie, dass A über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ jeweils in Frobenius-Normalform ist.

(b) Begründen Sie, dass $\chi_A(X) = X^3 - 2$, und zerlegen Sie χ_A jeweils über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ in Primfaktoren (Hinweis: Bemerkung 5.19).

(c) Geben Sie jeweils über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die allgemeine Normalform von A an.

Aufgabe 2: Es sei R ein kommmutativer Ring mit Eins. Wir definieren Binomialkoeffizienten in $\mathbb{Z}$ und in R durch

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \in \mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{i} = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\binom{n}{i} \text{ Summanden}} \in R$$

Zeigen Sie

(a) Es gilt $\binom{n+1}{i+1} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \in R$.

(b) Es gilt $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \in R$ für allle $a, b \in R$.

(c) Falls p eine Primzahl ist, gilt in $\mathbb{Z}$, dass

$$p \mid \binom{p}{i} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, p-1.$$

(d) Falls R Charakteristik p hat (siehe Definition 2.14), ist die Abbildung $F : R \to R$ mit $F(r) = r^p$ ein Ringhomorphismus.

Aufgabe 3: Es sei V ein endlich-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. Sei $W \subset V$ ein F-invarianter Unterraum.

(a) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von $F|_W$ ein Teiler des Minimalpolynoms von F ist.

(b) Es sei $\bar{F} : V/W \to V/W$ der induzierte Endomorphismus. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von $\bar{F}$ ein Teiler des Minimalpolynoms von F ist.

Aufgabe 4: Es sei $P \in \mathcal{P}(\Bbbk[X])$ ein irreduzibles, normiertes Polynom, $l \in \mathbb{N}$ und $V = \Bbbk[X]/(P^l)$. Wir fassen V als $\Bbbk$-Vektorraum auf und schreiben $F \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ für die Multiplikation mit X.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\ker(P^a(F)) = (P^{l-a})/(P^l) \subset \Bbbk[X]/(P^l) ,$$

(b) Es seien $1 \leq l_1 \leq \ldots \leq l_k$ und
$$W = \sum_{i=1}^{k} \Bbbk[X]/(P^{l_i}) . \tag{1}$$
Berechen Sie $\dim\ker(P^a(F))$ für alle $a \geq 0$.

(c) Seien jetzt $d_a = \dim\ker(P^a(F))$ gegeben. Berechen Sie daraus die Zahlen l_i aus (1).