9. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Montag, den 24.06.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es sei V ein zwei-dimensionaler $\mathbb{k}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie die möglichen allgemeinen Normalformen für einen Endomorphismus $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{k}}(V)$ in beiden Fällen.

Aufgabe 2:

(a) Es sei $A \in M_7(\mathbb{R})$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2(X-4)^3$$

und

$$\dim\ker(A - 2E_7) = 1, \quad \dim\ker(A - 3E_7) = 2, \quad \dim\ker(A - 4E_7) = 1.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

(b) Es sei jetzt $B \in M_7(\mathbb{R})$ eine andere Matrix mit dem gleichem charakteristischen Polynom $\chi_B(X) = \chi_A(X)$ und dem Minimalpolynom

$$\mu_B(X) = (X-2)(X-3)^2(X-4).$$

Bestimmen Sie die Normalform von B.

Aufgabe 3: Es sei $A \in M_n(\mathbb{k})$. Wir fassen $\mathbb{k}^n$ als $\mathbb{k}[X]$-Torsionsmodul auf, auf dem X wie A wirkt. Wir definieren $\varphi : \mathbb{k}[X]^n \to \mathbb{k}^n$ durch

$$\varphi(Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{i=1}^{m} Q_i(A)(e_i) ,$$

wobei $(e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{k}^n$ sei. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung φ ist $\mathbb{k}[X]$-linear und surjektiv.

(b) Für die Matrix $X \cdot E_n - A \in M_n(\mathbb{k}[X])$ gilt $\ker\varphi = \operatorname{im}(X \cdot E_n - A)$.

Es sei jetzt $C \in M_n(\mathbb{k}[X])$ die Smith-Normalform von $X \cdot E_n - A$ mit normierten Polynomen auf der Diagonalen, und es seien S, $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{k}[X])$, so dass $X \cdot E_n - A = S \cdot C \cdot T$. Zeigen Sie:

(c) Die von 1 verschiedenen Diagonaleinträge von C sind genau die invarianten Faktoren $P_1, \dots, P_k$ der Matrix A.

(d) Es seien $s_1, \dots, s_n$ die Spalten von S, dann sind die von 0 verschiedenen Vektoren $\varphi(s_i)$ jeweils zyklische Erzeuger der $\mathbb{k}[X]$-Untermoduln $V_i \cong \mathbb{k}[X]/(P_i)$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie mit dem Verfahren aus Aufgabe 3(c) die invarianten Faktoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

und geben Sie die Frobenius-Normalform an.

Bestimmen Sie auch eine passende Basis B von $\mathbb{Q}^3$, in dem Sie wie in Aufgabe 3(d) zyklische Erzeuger $\varphi(s_i)$ bestimmen und durch Vektoren der Form $A^j\varphi(s_i)$ jeweils zu $\Bbbk$-Basen der A-invarianten Unterräume V_i ergänzen.