12. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Montag, den 15.07.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es sei (V, g) ein endlich-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subset V$ ein Unterraum. Es bezeichne $p : V \to U$ die orthogonale Projektion aus Bemerkung 7.20 (1). Zeigen Sie:

(a) Der Raum $W = \ker p \subset V$ ist ein Komplement von U (siehe Definition 2.56), und es gilt $g(u, w) = 0$ für alle $u \in U$ und alle $w \in W$.

(b) Es sei q die orthogonale Projektion auf W. Wir fassen p, q als Endomorphismen von V auf, dann gilt

$$p^2 = p, \quad q^2 = q, \quad p + q = \mathrm{id}_V.$$

(c) Die Abbildungen p und q sind selbstadjungiert.

Aufgabe 2: Es seien (V, g) und (W, h) Vektorräume mit Skalarprodukt und $F : V \to W$ linear. Bezüglich der (nicht notwendigerweise orthonormalen) Basen $(v_1, \dots, v_n)$ von V und $(w_1, \dots, w_m)$ von W seien g, h und F gegeben durch Matrizen $G \in M_n(\Bbbk)$, $H \in M_m(\Bbbk)$ und $A \in M_{m,n}(\Bbbk)$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der adjungierten Abbildung $F^* : W \to V$ bezüglich der obigen Basen.

Aufgabe 3: Es sei $A \in M_n(\Bbbk)$ eine quadratische Matrix. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Wenn $x^*Ay = 0$ für alle $x \in \Bbbk^n$, folgt $y = 0$,

(b) Wenn $x^*Ay = 0$ für alle $y \in \Bbbk^n$, folgt $x = 0$,

(c) A ist invertierbar.

Aufgabe 4: Es sei $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, (V, g) ein n-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum und $\omega \in \Lambda^n V^*$ eine Determinantenfunktion. Zeigen Sie:

(a) Für alle $(n-1)$-Tupel $(v_2, \dots, v_n) \in V^{n-1}$ existiert genau ein Vektor $w \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt

$$g(w, v) = \omega(v, v_2, \dots, v_n).$$

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und ω sei das Spatprodukt. Dann gilt $w = v_2 \times v_3$.

(c) Es gelte $|\omega(e_1, \dots, e_n)| = 1$ für eine Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$. Falls $(v_2, \dots, v_n)$ ein orthogonales $(n-1)$-Tupel von Vektoren der Länge 1 ist und w wie oben bestimmt wurde, dann ist $(w, v_2, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis mit $\omega(w, v_2, \dots, v_n) = 1$.