Übungen zur Vorlesung „Analysis II“
im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 01 28. April 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. *Gleichmäßige Stetigkeit (5 Punkte)*

   (a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie: Ist f Lipschitzstetig, so ist f gleichmäßig stetig (vgl. Kap 5, Satz 1.4 im Skript).

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, nicht gleichmäßig stetig ist.

2. *(4 Punkte)* Der Heizölverbrauch $V(x)$ (in Litern pro Stunde) eines Hauses bei der Außentemperatur x sei durch die Formel

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \geq 18 \\ \frac{1}{20}(18 - x) & \text{falls } x \leq 18 \end{cases}$$

   gegeben. Um den Verbrauch an einem bestimmten Frühlingstag abzuschätzen, liest der Besitzer folgende Außentemperaturen an seinem Thermometer ab

Uhrzeit	0	6	8	10	12	14	17	20	24
Temperatur	4	4	6	10	16	19	18	9	6

   Nehmen Sie an, dass die Temperatur bis 14 Uhr monoton steigt und ab 14 Uhr monoton fällt. Berechnen Sie eine möglichst gute Obergrenze und eine möglichst gute Untergrenze für den Heizölverbrauch an diesem Tag.

   Bemerkung: Der Verbrauch ist durch $\int_0^{24} V(x(t))\mathrm{d}t$ gegeben.

3. *(2 Punkte)*

   (a) Ein Auto fährt von einer Stadt zu einer anderen. Während der ersten halben Stunde fährt es 50 km/h, dann eine Stunde mit 130 km/h und am Ende noch eine Viertelstunde mit 60 km/h. Wie groß ist die Strecke S, die das Auto zurücklegt?

   (b) Überlegen Sie sich: Mit

$$v(t) = \begin{cases} 50 & \text{für } 0 \leq t < 0,5 \\ 130 & \text{für } 0,5 \leq t < 1,5 \\ 60 & \text{für } 1,5 \leq t \leq 1,75 \end{cases}$$

   gilt $S = \int_0^{1,75} v(t)\mathrm{d}t$ für die in a) berechnete Strecke S und $\overline{v} = \frac{1}{1,75}\int_0^{1,75} v(t)\mathrm{d}t$ für die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v} = \frac{S}{1,75}$.

4. *(5 Punkte)* Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt. Für $f : D \to \mathbb{R}^m$ definieren wir die Supremumsnorm durch

$$\|f\|_D = \sup\{|f(x)| \ \mid \ x \in D\},$$

wobei $|f(x)|$ die euklidische Norm von $f(x) \in \mathbb{R}^m$ bezeichnet.

Die Menge der beschränkten Funktionen $\{f : D \to \mathbb{R}^m \mid \|f\|_D < \infty\}$ wird mit $\mathcal{B}(D, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet.

Zeigen Sie: Die Supremumsnorm ist eine Norm auf $\mathcal{B}(D, \mathbb{R}^m)$, d.h. es gilt:

- Positivität: Für alle $f \in \mathcal{B}(D, \mathbb{R}^m)$ gilt $\|f\|_D \geq 0$ mit Gleichheit genau wenn $f = 0$.
- Positive Homogenität: Für alle $f \in \mathcal{B}(D, \mathbb{R}^m)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda f\|_D = |\lambda| \cdot \|f\|_D$.
- Dreiecksungleichung: Für alle $f, g \in \mathcal{B}(D, \mathbb{R}^m)$ gilt $\|f + g\|_D \leq \|f\|_D + \|g\|_D$.

Abgabe: Montag, 5. Mai, bis 12 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt