Übungen zur Vorlesung „Analysis II“ im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 02 — 5. Mai 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. *3 Punkte:* Für das Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, betrachten wir die „äquidistanten“ Zerlegungen $Z_N = (x_0^N, \ldots, x_n^N)$ mit $x_k^N = a + k \cdot \frac{b-a}{N}$ mit der Stützstellenfolge $\xi^N = (\xi_1^N, \ldots, \xi_N^N)$ mit $\xi_k^N = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} = a + (2k-1)\frac{b-a}{2N}$.

   (a) Skizzieren Sie Z_N und ξ^N für $[a,b] = [0,6]$ und $N = 6$.

   (b) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz mit Konstante L.
   Zeigen Sie: Dann gilt für alle $N \geq 1$:

$$\left| S_{Z_N,\xi^N}(f) - \int_a^b f \right| \leq \frac{L(b-a)^2}{2N}.$$

   Anleitung: Zeigen Sie zunächst

$$\left| \int_{x_{k-1}^N}^{x_k^N} \big(f(x) - f(\xi_k^N)\big) \right| \leq \frac{L(b-a)^2}{2N^2}.$$

2. *3 Punkte:*

   (a) Für das Intervall $[0,\pi]$ sei Z die Zerlegung $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{10}$ mit $x_k = \frac{k}{10} \cdot \pi$ für $k \in \{0, \ldots 10\}$. Wir wählen für $k \in \{1, \ldots, 10\}$ die Stützstellen $\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \in [x_{k-1}, x_k]$. Berechnen Sie zur Zerlegung Z und den Stützstellen ξ_k, $k \in \{1, \ldots, 10\}$, die Riemannsche Summe des Sinus

$$S_{Z,\xi}(\sin)$$

   mit Hilfe des Taschenrechners auf 5 Stellen nach dem Komma genau.

   (b) Berechnen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_0^\pi \sin(x)\, dx.$$

   Vergleichen Sie $\left|S_{Z,\xi}(\sin) - \int_0^\pi \sin(x)\, dx\right|$ mit der Abschätzung, die Sie aus Aufgabe 1 b) erhalten. Was fällt auf?

3. *6 Punkte:* Seien $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stückweise stetige Funktionen. Das Integral über die komplexwertige Funktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $z(x) = u(x) + i \cdot v(x)$, ist folgendermaßen definiert:

$$\int_a^b z(x)\, dx := \int_a^b u(x)\, dx + i \cdot \int_a^b v(x)\, dx \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Zeigen Sie für $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\int_a^b e^{i\sigma x}\, dx = -\frac{i}{\sigma}(e^{i\sigma b} - e^{i\sigma a})$.

(b) Zeigen Sie für $k, l \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} \cdot e^{-ilx}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 2\pi & \text{für } k = l \end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie für m, $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, dx, \qquad \int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\, dx, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\, dx.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabenteil b).

4. *4 Punkte:* Berechnen Sie folgende Integrale mit partieller Integration und Substitutionsregel:

(a) $\int_0^1 \arctan(x)\, dx$, $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(x)\sin(x)\, dx$,

(b) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, dx$, $\quad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx, \quad a > 0$,

Abgabe: Montag, 12. Mai, bis 12.30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $m \in \mathbb{R}_{>0}$ und $c \in \mathbb{R}$ sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(mx + c)$ definiert. Zeigen Sie: $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G(x) = \frac{1}{m}F(mx + c)$ ist eine Stammfunktion von g und es gilt:

$$\int_a^b g = \frac{1}{m} \int_{ma+c}^{mb+c} f.$$

2. Prüfen Sie nach, dass arctan eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ist. Berechnen Sie dann eine Stammfunktion von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{(x-5)^2+2}$.