Übungen zur Vorlesung „Analysis II“ im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 04 — 19. Mai 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. *(2 Punkte)* Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $u, v \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie: Erfüllen u und v das Gleichungssystem („Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen “)

$$\begin{aligned} \partial_1 u &= \partial_2 v \\ \partial_2 u &= -\partial_1 v, \end{aligned}$$

   so sind u und v harmonische Funktionen.

2. *(8 Punkte)* Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $h(\varphi + \pi) = -h(\varphi)$ gilt (und sei h sonst ganz beliebig).

   (a) Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:
   $$F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = rh(\varphi).$$

   (b) Zeigen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\partial_v F(0,0)$ existiert und dass für $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ gilt:
   $$\partial_v F(0,0) = h(\varphi).$$

   (c) Für welche Funktionen h ist F an der Stelle $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar?

   (d) Zeigen Sie, dass F an der Stelle $(0,0)$ unstetig ist, wenn h unbeschränkt ist.

3. *Kugelkoordinaten. (6 Punkte)* Die Abbildung

$$f : [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\theta,\phi) \mapsto \begin{pmatrix} r\,\cos\phi\,\sin\theta \\ r\,\sin\phi\,\sin\theta \\ r\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

   transformiert Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.

   (a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix J von f.

   (b) Zeigen Sie, dass für die Determinante der Jacobimatrix gilt: $\det J(r,\theta,\phi) = r^2 \sin\theta$.

   (c) Sei die Abbildung $F : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(\theta,\phi) = f(1,\theta,\phi)$. Weiterhin seien $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = 3\pi/4$, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi/4$ und $\phi_3 = \pi/2$. Skizzieren Sie die Bildmenge $F([0,\pi] \times [0,2\pi])$ und zeichnen Sie darauf die Kurven $\phi \mapsto f(\theta_i,\phi)$ und $\theta \mapsto f(\theta,\phi_i)$ ein für $i = 1,2,3$.

   (d) Bestimmen Sie zu jedem Paar von Kurven $r \mapsto (r,\theta_0,\phi_0)$, $\theta \mapsto (r_0,\theta,\phi_0)$ und $\phi \mapsto (r_0,\theta_0,\phi)$ den Schnittwinkel, unter dem sie sich am Punkt $f(r_0,\theta_0,\phi_0)$ für $(r_0,\theta_0,\phi_0) \in (0,\infty) \times (0,\pi) \times [0,2\pi]$ schneiden.

Abgabe: Montag, 26. Mai, bis 12.30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Zeigen Sie: Für $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gelten:

$$\begin{aligned} \partial_{e_j} f(x) &= \partial_j f(x) \\ \partial_{\lambda v} f(x) &= \lambda \partial_v f(x), \text{ speziell: } \partial_{-v} f(x) = -\partial_v f(x). \end{aligned}$$

2. *Polarkoordinaten.* Die Abbildung

$$f : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

transformiert Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten.

(a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix J von f.

(b) Zeigen Sie, dass für die Determinante der Jacobimatrix gilt: $\det J(r, \phi) = r$.

(c) Skizzieren Sie die Kurven $r \mapsto (r, \pi/2)$ und $\phi \mapsto (1, \phi)$. Unter welchem Winkel schneiden sich diese Kurven am Punkt $f(1, \pi/2)$? Bestimmen Sie auch die Schnittwinkel der Kurven $r \mapsto (r, \phi_0)$ und $\phi \mapsto (r_0, \phi)$ an jedem (anderen) Punkt $(r_0 \cos \phi_0, r_0 \sin \phi_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.