Übungen zur Vorlesung „Analysis II“ im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 05 26. Mai 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für $z = re^{i\varphi}$ durch $f(z) = z^2 = r^2 e^{2\varphi i}$ gegeben. Seien $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/4$, $\varphi_3 = 3\pi/4$, $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Skizzieren Sie in $\mathbb{R}^2$ die Kurven

$$\alpha_j : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_j(r) = re^{i\varphi_j}, \quad j = 1,2,3$$
$$\beta_j : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2, \quad \beta_j(\varphi) = r_j e^{i\varphi}, \quad j = 1,2,3.$$

Zeichnen Sie dann in eine weitere Skizze des $\mathbb{R}^2$ die Bildkurven $f \circ \alpha_j$, $f \circ \beta_j$ für $j = 1,2,3$ ein.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = e^x(\cos y, \sin y)$. Seien $y_1 = x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_2 = \frac{1}{2}\pi$, $x_3 = -1$ und $y_3 = \pi$. Skizzieren Sie in $\mathbb{R}^2$ die Koordinatenlinien

$$\alpha_j : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_j(x) = (x, y_j), \quad j = 1,2,3$$
$$\beta_j : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \beta_j(y) = (x_j, y), \quad j = 1,2,3.$$

Zeichnen Sie dann in eine weitere Skizze des $\mathbb{R}^2$ die Bildkurven $f \circ \alpha_j$, $f \circ \beta_j$ für $j = 1,2,3$ ein.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei differenzierbar und erfülle die „Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen“

$$\partial_1 f_1 = \partial_2 f_2 \quad \text{und} \quad \partial_2 f_1 = -\partial_1 f_2.$$

Zeigen Sie: Sind $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$, $\beta : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ differenzierbare Kurven mit $\alpha(0) = \beta(0)$ und $\alpha'(0) \neq 0$, $\beta'(0) \neq 0$ und gilt $Df(\alpha(0)) \neq 0$, so ist der Schnittwinkel der Kurven α und β an der Stelle $t = 0$ gleich dem Schnittwinkel von $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$ an der Stelle $t = 0$ (Dabei ist der Schnittwinkel von α und β an der Stelle $t = 0$ als der Winkel zwischen den Vektoren $\alpha'(0)$ und $\beta'(0)$ definiert, analog für $f \circ \alpha$, $f \circ \beta$. Man sagt dazu auch, f sei winkeltreu oder winkelerhaltend.)

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) f ist am Punkt $(0,0)$ stetig.

(b) Zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $\partial_v f((0,0))$. Speziell existieren die Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ von f.

(b*) *(2 Zusatzpunkte)* Für jede differenzierbare Kurve $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ ist auch $f \circ \gamma$ differenzierbar.

Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (x'(0)t + \varepsilon_x(t), y'(0)t + \varepsilon_y(t))$.

(c) Für die Kurve $c(t) = (t, t)$ gilt für $t = 0$ nicht die Kettenregel

$$(f \circ c)'(t) = \partial_1 f(c(t))c_1'(t) + \partial_2 f(c(t))c_2'(t).$$

Folgern Sie daraus, dass f an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist.

4. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $G := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Graph von f. Zeigen Sie: Ist $c : (a, b) \to \mathbb{R}^{n+1}$ differenzierbar und gilt $c(t) \in G$ für alle $t \in (a, b)$, d.h. $c(t) = (x(t), f(x(t)))$ für eine differenzierbare Kurve $x : (a, b) \to \mathbb{R}^n$, so gilt:

   $c'(t)$ steht senkrecht zum Vektor $(-\operatorname{grad} f(x(t)), 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, d.h. für alle $t \in (a, b)$ gilt $\langle c'(t), (-\operatorname{grad} f(x(t)), 1)\rangle = 0$.

   (D.h. für alle $p = (x, f(x)) \in G$ ist $(-\operatorname{grad} f(x), 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Normalenvektor von G am Punkt p.)

Abgabe: Montag, 2. Juni, bis 12.30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Zeigen Sie:

   (a) f ist die reelle Darstellung der Abbildung $z \in \mathbb{C} \to z^2 \in \mathbb{C}$ und erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

   $$\partial_1 f_1 = \partial_2 f_2 \quad \text{und} \quad \partial_2 f_1 = -\partial_1 f_2.$$

   (b) Durch $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ betrachte die Koordinatenlinien $\alpha(t) = (x_0 + t, y_0)$, $\beta(t) = (x_0, y_0 + t)$. Zeigen Sie: $\langle (f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0)\rangle = 0$.