Übungen zur Vorlesung „Analysis II“ im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 06 2. Juni 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

HINWEIS: Sie können in jeder Aufgabe 4 Punkte erreichen. Insgesamt wird dieses Hausaufgabenblatt jedoch nur mit 16 Punkten bei der Zulassung zur Klausur eingerechnet. Sie können also auf diesem Blatt bis zu 8 Bonuspunkte erreichen.

1. Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion
$$f : [0,3] \times [0,3] \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y.$$

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:
Gilt $\partial_1 f(x,y) = \partial_2 f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so existiert eine differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
$$f(x,y) = \varphi(x+y).$$

3. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $F(x) = |x|x$ (mit $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$) definiert. Zeigen Sie: $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $h \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$DF(x)h = \left\langle \frac{x}{|x|}, h \right\rangle x + |x|h \quad (\in \mathbb{R}^n).$$
Berechnen Sie auch $DF(0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Man definiert $\int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R}^n$ durch $\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b f_n(t)\,dt\right)$.
Zeigen Sie:
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass $(S_{Z,\xi}(f_1), \dots, S_{Z,\xi}(f_n)) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k)\Delta x_k$ gilt, wobei Z eine Zerlegung gegeben durch $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ und $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ Stützstellen sind. Nutzen Sie dann die Dreiecksungleichung.

5. Es seien $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ und $c > 0$.
   (a) Zeigen Sie: Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $$u(t,x) := F(x+ct) - G(x-ct)$$
   ist in $C^2(\mathbb{R}^2)$ und erfüllt die „Wellengleichung“ $\partial_1\partial_1 u = c^2 \partial_2\partial_2 u$.

   Wir betrachten den Fall $F(x) = \exp(-x^2)$, $G(x) = 0$.

   (b) Zeichnen Sie für $t \in \{-1, 0, 1\}$ und $c = 1$ die Graphen $x \mapsto F(x+ct)$ in ein gemeinsames Schaubild ein.
   (c) Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Bestimmen Sie $x(t) \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $x \mapsto F(x+ct)$ ihr Maximum an der Stelle $x(t)$ annimmt. (Dies erklärt, weshalb c Wellengeschwindigkeit genannt wird.)

6. Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{|x|^2} x$. Zeigen Sie:
   (a) $f \in C^\infty(R^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$
   (b) $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$
   (c) Für alle $r > 0$ gilt $f(S^{n-1}(r)) = S^{n-1}(\frac{1}{r})$, wobei $S^{n-1}(\rho) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = \rho\}$.
   (d) Für alle $r > 0$ gilt $f(B^n(0,r) \setminus \{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > \frac{1}{r}\}$.
   (e) f ist winkeltreu, vgl. zur Definition von winkeltreu Blatt 5, Aufgabe 2. Winkeltreue Abbildungen werden auch als konforme Abbildungen bezeichnet.

Abgabe: Montag, 16. Juni, bis 12.30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:
$$\operatorname{grad}(f \circ g)(x) = f'(g(x)) \cdot \operatorname{grad} g(x).$$

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:
   Ist $x \in \mathbb{R}$ und $c_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Kurve $c_x(t) = (x + t, -t)$, so gilt
$$(f \circ c_x)'(t) = \partial_1 f(c_x(t)) - \partial_2 f(c_x(t)).$$