Übungen zur Vorlesung „Analysis II“
im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 07 16. Juni 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. Berechnen Sie das 3. Taylorpolynom der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^x \cdot \cos y$, an der Stelle $(0,0)$. Vergleichen Sie mit dem Produkt der 3. Taylorpolynome der Funktion e^x und $\cos y$:
$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2}\right).$$

2. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^k(\mathbb{R})$. Sei weiterhin $x_0 \in \mathbb{R}$ ein kritischer Punkt von f, so dass $f^{(j)}(x_0) = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, k-1\}$ und $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie:
   (a) Ist k ungerade, so ist x_0 kein lokales Extremum von f.
   (b) Ist k gerade und $f^{(k)}(x_0) > 0$, so ist x_0 ein lokales Minimum von f.
   (c) Ist k gerade und $f^{(k)}(x_0) < 0$, so ist x_0 ein lokales Maximum von f.

3. Wird ein Fahrzeug aus der Geschwindigkeit v auf Stillstand gebremst, so setzt man für den Bremsweg $s = s(v)$ die Beziehung
$$s(v) = av^2 + bv + c$$
mit fahrzeugabhängigen Konstanten $a, b, c > 0$ an. Um a, b, c approximativ zu bestimmen, macht man n Messungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten $v_1, \dots, v_n$, misst die zugehörigen Bremswege $s_1, \dots, s_n$ und berechnet a, b, c dann so, dass für diese a, b, c
$$\sum_{i=1}^{n} (s(v_i) - s_i)^2$$
minimal (im Vergleich mit anderen a, b, c) ist.

   Zeigen Sie: Die gesuchten a, b, c erfüllen die Gleichung
$$\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} v_i^4 & v_i^3 & v_i^2 \\ v_i^3 & v_i^2 & v_i \\ v_i^2 & v_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} v_i s_i^2 \\ v_i s_i \\ s_i \end{pmatrix}.$$

4. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y,z) = 4x(x-2) + y(y-2) + 2z(x+y+z-2) + 5.$$

Abgabe: Montag, 23. Juni, bis 12.30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Berechnen Sie mittels eines Taylorpolynoms von $f(x) = \ln(1+x)$ durch Abschätzung des Restglieds einen Näherungswert für $\ln 11 - \ln 10 = \ln \frac{11}{10} = \ln(1 + \frac{1}{10})$, der sich vom wahren Wert um höchstens $0,000025 = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4}$ unterscheidet.