Übungen zur Vorlesung „Analysis II“ im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 08 23. Juni 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. Zeigen Sie:

   Eine Funktion $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann ein Polynom in $\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^n)$, wenn $D^\alpha f = 0$ für alle $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ mit $|\alpha| = k+1$.

2. Seien $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $D^\gamma f(x,y) = 0$ für alle $\gamma \in (\mathbb{N}_0)^2$ mit $|\gamma| \leq k-1$ und alle $(x,y) \in \partial[0,1]^2 = \{0,1\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0,1\}$.

   Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^2$ mit $|\alpha| = k$ gilt:

$$\int_0^1 \int_0^1 D^\alpha f(x,y) g(x,y) dx\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) D^\alpha g(x,y) dx\, dy.$$

   Hinweis: Induktion über die Ordnung von α.

3. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Zeigen Sie:

   (a) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ sind die Integrale

$$f(y) := \int_0^1 g(x,y)\, dx \quad \text{und} \quad \widetilde{f}(y) := \int_0^1 \partial_2 g(x,y) dx$$

   wohldefiniert.

   (b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt $f'(0) \neq \widetilde{f}(0)$.

   (c) Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 4.2?

4. Die Funktion f sei für $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^2-y^2x}{(x+y)^5}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Zeigen Sie:

   (a) Für jedes $x \in [0,1]$ ist die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ stetig und für jedes $y \in [0,1]$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ stetig.

   (b) Für alle $(x,y) \in [0,1]^2$ gilt $f(x,y) = -f(y,x)$ und f ist auf $[0,1]^2$ nach unten und nach oben unbeschränkt.

(c) Die Funktionen $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy$, und $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, $G(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$ sind stetig, und es gilt $F(x) = -G(x)$ für alle $x \in [0,1]$.

(d) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 F(x)\,dx \neq \int_0^1 G(y)\,dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$.

(e) Warum ist das kein Widerspruch zu Satz 4.3?

Abgabe: Montag, 30. Juni, bis 12.30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \partial[0,1]^2 = \{0,1\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0,1\}$. Zeigen Sie, dass für $i = 1, 2$ gilt:

$$\int_0^1 \int_0^1 \partial_i f(x,y) g(x,y) dx\ dy = -\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \partial_i g(x,y) dx\, dy.$$

2. Sei p reelles Polynom und $0 \neq y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie durch Taylorentwicklung von p mit Entwicklungspunkt $-y$ das Polynom q für das $p(x) = q(x+y)$ gilt.

   Benutzen Sie diese Darstellung, um für positives y eine Stammfunktion der Funktion

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{yx^2 - xy^2}{(x+y)^5}$$

   zu finden.