Übungen zur Vorlesung „Analysis II“
im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 09 30. Juni 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. (a) *(1 Punkt)* Die ebene Kurve $\gamma : [1, 5] \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - t + 2 \\ \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Bogenlänge $L(\gamma)$.

(b) *(3 Punkte)* Sei p ein Punkt auf dem Kreis mit Radius $r > 0$. Bestimmen Sie eine Parametrisieung der Kurve γ_r auf der sich der Punkt p bewegt, während der Kreis auf einer Geraden abgerollt wird. Skizzieren Sie γ_1 und berechnen Sie die Bogenlänge von γ_r während eines Umlaufs des Kreises in Abhängigkeit von $r > 0$.

2. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes

$$F(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

längs der Kurven

(a) $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = t(\cos t, \sin t)$

(b) $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = t(\cos t, -\sin t)$

(c) Ist F ein Gradientenfeld? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{K}$ die Menge der parametrisierten Kurven $\{\gamma : I_\gamma \to \mathbb{R}^n \mid I_\gamma \subseteq \mathbb{R} \text{ ein Intervall und } \gamma \in C^1(I_\gamma, \mathbb{R}^n)\}$ im $\mathbb{R}^n$. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ durch $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$ genau dann, wenn γ eine Umparametrisierung von $\widetilde{\gamma}$ ist.

Zeigen Sie: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

4. Seien $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ und φ_ε wie in Anwesenheitsaufgabe 1). Zu $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ definiere $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(x - t)\, dt$$

$$\Big(= \int_a^b f(t)\varphi_\varepsilon(x - t) dt \text{ für jedes Intervall } [a, b] \supset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\Big).$$

Zeigen Sie:

(a) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(x))\varphi_\varepsilon(x - t) dt.$$

(c) Auf jedem kompakten Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert $f_\varepsilon|_{[a,b]}$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen $f|_{[a,b]}$.

Abgabe: Montag, 7. Juli, bis 12.30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ so, dass $\varphi|_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} = 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\ dt (= \int_{-1}^{1} \varphi(t)\ dt) = 1$, vgl. Abbildung 1. Für $\varepsilon > 0$ definiere $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ durch $\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}t\right)$.

   Zeigen Sie:

   (a) Skizzieren Sie für eine Funktion φ, wie in Abbildung 1 dargestellt, den Graphen der Funktion φ_ε für $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$.

   (b) $\varphi_\varepsilon|_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} = 0$

   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(t)\ dt = 1$

   (d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(x-t)\ dt = 1$

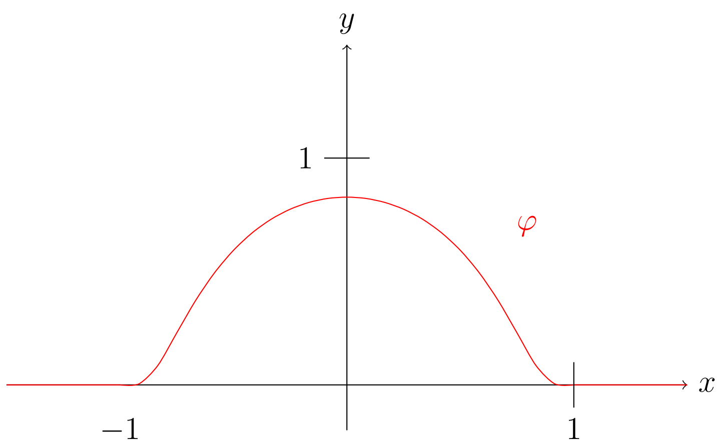

Abbildung 1: Der Graph einer Funktion φ mit den oben beschriebenen Eigenschaften.