Übungen zur Vorlesung „Analysis II“
im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 10 7. Juli 2014

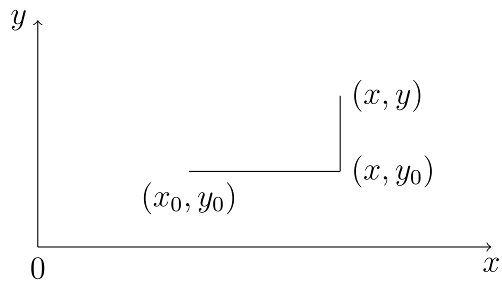
Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. Sei $F : \Omega := \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 2\frac{y}{x}(y^2 - 3) + x^2 \\ 3(1 - y^2) \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Folgern Sie daraus, dass F ein Gradientenfeld ist.

   (b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion f von F. Wählen Sie dazu zunächst einen festen Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ und bestimmen Sie dann f durch Integration von F entlang einer Kurve, die stückweise parallel zu den Koordinatenachsen verläuft.



2. Betrachten Sie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

   Besitzt das Vektorfeld F eine Stammfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion an.

   Hinweis: Integrieren Sie F längs Kurven, wie in Anwesenheitsaufgabe 1 angegeben. Bestimmen Sie so Stammfunktionen φ_i für $F|\Omega_i$, $i = 1, 2$, mit $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ und $\Omega_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$. Zeigen Sie dann, dass $\varphi_1 = \varphi_2$ auf $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

3. (a) Zeigen Sie, dass für das Vektorfeld $F : \Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ z \end{pmatrix}$$

   gilt: $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

   (b) Zeigen Sie, dass F kein Gradientenfeld ist. Folgern Sie daraus, dass Ω nicht einfach zusammenhängend ist.

4. Zeigen Sie:

   (a) Die „geschlitzte Ebene“ $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ ist sternförmig.

   (b) Es existiert genau eine Stammfunktion $\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$ des „Winkelvektorfelds“ $W|_\Omega$, $W(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$, mit $\varphi(-1, 0) = \pi$. Es gilt $\varphi(\Omega) = (0, 2\pi)$.

(c) Für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt

$$(x, y) = r(x, y)(\cos \varphi(x, y), \sin \varphi(x, y))$$

mit $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
(D.h. $(r(x, y), \varphi(x, y))$ sind die Polarkoordinaten von (x, y).)
Anleitung: Bestimmen Sie dazu φ durch Integration längs Kurven, die wie in Anwesenheitsaufgabe 1 definiert werden.

(d) In Kapitel 3, Satz 2.8, haben wir die Funktion $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [0, 2\pi)$ kennengelernt. Für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt: $\varphi(x, y) = \arg(x + iy)$.

5. *(4 Bonuspunkte)* Prüfen Sie, ob das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \sin z + x + y \\ xe^{xy} \sin z + x + y - z \\ e^{xy} \cos z - y + z \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld ist und bestimmen Sie gegebenenfalls (wie in Aufgabe 1) eine Stammfunktion.

Abgabe: Montag, 14. Juli, bis 12.30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $F : \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\} \to \mathbb{R}^2$ ein Gradientenfeld. Zeigen Sie, dass es zu jedem $(x, y) \in \Omega$ eindeutig bestimmte $\varphi \in (-\pi, \pi)$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass die Kurve $\gamma_{(x,y)} : [0, 2] \to \Omega$

$$\gamma_{(x,y)}(t) = \begin{cases} (\cos \varphi t, \sin \varphi t), & \text{falls } t \in [0, 1] \\ ((t-1)r + (2-t))(\cos \varphi, \sin \varphi), & \text{falls } t \in [1, 2] \end{cases}$$

den Punkt $(1, 0)$ mit dem Punkt (x, y) verbindet. Folgern Sie, dass durch

$$f(x, y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} F \cdot d\vec{x}$$

eine Stammfunktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ von F definiert wird.