Übungen zur Vorlesung „Analysis II“ im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 11 14. Juli 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. (a) Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}(2, \mathbb{R})$, d.h. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\det A \neq 0$, mit $\det A = ad - bc > 0$, so existiert eine stetige Abbildung $M : [0,1] \to \mathrm{Gl}(2,\mathbb{R})$ mit $M(0) = A$ und $M(1) = E_2$.

   (b) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$, $A \in \mathrm{Gl}(2,\mathbb{R})$ und $\widetilde{\gamma} = A\gamma$. Dann gilt:

   $$n_{\widetilde{\gamma}}(0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \det A > 0 \\ -1 & \text{falls } \det A < 0 \end{cases} .$$

   Hinweis: Falls $\det A > 0$ ist, liefert Aufgabenteil a) eine geschlossene Homotopie in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zwischen $\widetilde{\gamma}$ und γ.

2. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen.

   Zeigen Sie: Die Menge der stetigen Funktionen $C^0(K)$ auf K versehen mit dem Abstand $d(f,g) := \max_{x\in K} |f(x) - g(x)|$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

   Hinweis: Vergleichen Sie Kapitel 5, Satz 3.1.

3. Durch $F : (0,\infty) \times \mathbb{R} \times (0,\pi)^2 \to \mathbb{R}^4$

   $$F(r, \varphi, \theta_1, \theta_2,) = (r\cos\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2, r \sin\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2, r\cos\theta_1 \sin\theta_2, r\cos\theta_2)$$

   werden verallgemeinerte Polarkoordinaten definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass $F|_\Omega$ mit $\Omega = (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (0,\pi)^2$ injektiv ist und bestimmen Sie $F(\Omega)$.

   (b) Zeigen Sie, dass $DF(x)$ für alle $x \in \Omega$ invertierbar ist.

   (c) Folgern Sie, dass $F|_\Omega : \Omega \to F(\Omega)$ ein Diffeomorphismus ist.

   Hinweis: Vgl. Sie Aufgabe 3 von Blatt 4.

(4*) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ am Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar und $A = DF(x_0) \in \mathrm{Gl}(2,\mathbb{R})$. Zur Einfachheit nehmen wir an, dass $x_0 = 0$ und $F(0) = 0$ gilt.

   (a) Zeigen Sie: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $r \in (0, \varepsilon]$ gilt:

   $$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ \gamma_r(t) = F(r\cos t, r\sin t) \ \text{ und}$$
   $$\widetilde{\gamma}_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ \widetilde{\gamma}_r(t) = A \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

   sind in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ geschlossen homotop.

   (b) Sei $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(0) \cap \gamma_\varepsilon([0, 2\pi]) = \emptyset$. Benützen Sie Aufgabe 1b (auch wenn Sie sie nicht bearbeitet haben), um zu zeigen, dass $B_\delta(0) \subseteq F(B_\varepsilon(0))$ gilt.

   Hinweis: Sie können Anwesenheitsaufgabe 1 und die Beweismethoden aus dem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra benützen.

Abgabe: Montag, 21. Juli, bis 12.30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in PC^1([a,b], \mathbb{R}^2 \backslash \{y_0\})$ geschlossen. Zeigen Sie: Ist $y_1 \in \mathbb{R}^2 \backslash \gamma([a,b])$ und existiert ein Weg $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ von y_0 zu y_1 der γ nicht schneidet, so gilt: $n_\gamma(y_0) = n_\gamma(y_1)$. Hierbei ist die Umlaufzahl $n_\gamma(y_0)$ von γ um y_0 folgendermaßen definiert:

$$n_\gamma(y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\widetilde{\gamma}} W \cdot d\vec{x},$$

wobei $W(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$ und $\widetilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t) - y_0$.