Übungen zur Vorlesung „Analysis II“ im SoSe 2014 bei Prof. V. Bangert

Blatt 12 — 21. Juli 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 24 = 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie den Tangentialraum an der Stelle $(-2,1)$.

   (b) Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ unter der Nebenbedingung $-x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 24 = 0$.

2. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto e^{y^2+(x-2)y+1} - \cos z$.

   (a) Zeigen Sie, dass offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um $(1,0)$ und $V \subseteq \mathbb{R}$ um 0 sowie eine C^1-Funktion $g : U \to V$ existieren, so dass $g(1,0) = 0$ und $F(g(y,z),y,z) = 0$ für alle $(y,z) \in U$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass g an der Stelle $(1,0)$ ein lokales Maximum annimmt.

3. Die Materialkosten für eine Kiste ohne Deckel seien proportional zur Oberfläche plus der Summe der Kantenlängen, also durch

   $$f(x,y,z) := xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 4z$$

   mit den Kantenlängen x, y, z (> 0) gegeben. Welche Maße besitzt die billigste Kiste mit Volumen $xyz = c$ für $c > 0$?

   Hinweis: Nutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

4. Seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = x^2 + xy - y - z$ bzw. $g(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z$.

   Zeigen Sie, dass die Menge

   $$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\}$$

   eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, und dass $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (t, t^2, t^3)$, die Menge $\mathbb{R}$ bijektiv auf C abbildet.

Abgabe: Montag, 28. Juli, bis 12.30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = x^2+y^2$, und sei (a,b) eine Lösung der Gleichung $f(x,y) = 1$.

   Welche Bedingung an (a,b) ist nach dem Satz über implizite Funktionen hinreichend dafür, daß die Gleichung $f(x,y) = 1$ in einer Umgebung von (a,b) nach y aufgelöst werden kann?

   Geben Sie dann (möglichst große) offene Intervalle U von a und V von b in $\mathbb{R}$ sowie die Abbildung $\phi\colon U \to V$ an, so daß

   $$\{(x,y) \in U \times V \mid f(x,y) = 1\} = \{(x, \phi(x)) \mid x \in U\}.$$

   Beantworten Sie dieselben Fragen mit vertauschten Rollen für x und y.

2. Seien $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^2-Funktionen.

   Berechnen Sie die 2. Ableitung D^2h der Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(y,z) = f(g(y,z), y, z)$, mit Hilfe der Kettenregel.