

Anwesenheit Übungsblatt

Aufgabe 1: Finden Sie die Darstellung $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ in der Gaußschen Zahlenebene für die folgenden komplexen Zahlen:

$$(1+i)(1-i), \quad (1+i)^{-1}, \quad \frac{2+i}{2-i}, \quad e^{-i\pi}, \quad e^{5-i\pi/3}, \quad (1+i)^{100}.$$

Aufgabe 2: Geben Sie eine geometrische Beschreibung der folgenden Teilmengen von \mathbb{C} :

$$|z - i + 3| = 5, \quad |z - i + 3| \leq 5, \quad |z - i + 3| > 5, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad \operatorname{Re} z \leq 0.$$

Aufgabe 3: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$.

Aufgabe 4: Es sei

$$f(w) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{w^n}{n}.$$

Zeigen Sie:

- (a) Falls $w = x$ mit $x \in (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, dann konvergiert die Potenzreihe auf der rechten Seite gegen $\log(1+x)$.
- (b) Falls $|w| < 1$, dann ist die Potenzreihe absolut konvergent.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < 1$ sei

$$\log z = f(z-1).$$

- (c) Zeigen Sie, dass $\exp \log z = z$ gilt.