Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2014
27. Mai, 2014

Übungsblatt 5

Abgabe: Donnerstag, 4. Juni, 2014

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1: Es seien $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie: es gibt genau eine Möbiustransformation $M_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit

$$M_A(z_2) = 1, \quad M_A(z_3) = 0, \quad \text{und} \quad M_A(z_4) = \infty.$$

Für jeden Punkt $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_2, z_3, z_4\}$ gilt dann

$$M_A(z) = \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z - z_4}.$$

Aufgabe 2: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$, und $f, g : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{ord}_{z_0}(f + g) \geq \min\{\operatorname{ord}_{z_0} f, \operatorname{ord}_{z_0} g)$. Unter welche Umstände gilt

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f + g) > \min\{\operatorname{ord}_{z_0}(f), \operatorname{ord}_{z_0}(g)\}?$$

(b) $\operatorname{ord}_{z_0}(fg) = \operatorname{ord}_{z_0}(f) + \operatorname{ord}_{z_0}(g)$ und $\operatorname{ord}_{z_0} \frac{1}{g} = -\operatorname{ord}_{z_0} g$.

Aufgabe 3: Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Falls $k \in \mathbb{Z}$ mit $k > 0$, und Konstanten $c, C > 0$, und $R_0 > 0$ existieren, so dass

$$cR^k \leq \sup_{z \in S_R(0)} |f(z)| \leq CR^k \quad \text{für alle } R \geq R_0,$$

dann ist f ein Polynom vom Grad k.

Aufgabe 4: Für $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ sei $M_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ die entsprechende Möbiustransformation. Bestimmen Sie alle $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ mit $M_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, wobei $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.