Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2014
4. Juni, 2014

Übungsblatt 6

Abgabe: Mittwoch, 18. Juni, 2014, bis 16:00 Uhr

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Zeigen Sie: Falls $\bar{f}g$ holomorph ist, dann ist entweder f konstant oder g identisch 0.

Aufgabe 2: Es seien $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $f\colon B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| < 1$. Zeigen Sie: Falls $z_1, z_2 \in B_1(0)$ mit $z_1 \neq z_2$, $f(z_1) = z_1$, und $f(z_2) = z_2$ existieren, dann $f = \mathrm{id}$.

Aufgabe 3: Es sei die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = \sin(2t) + i\sin(t)\cos(2t)$.

(a) Skizzieren Sie γ.

(b) Bestimmen Sie $n_z(\gamma)$ für $z = \pm\frac{1}{2}$ und $z = \pm\frac{i}{2}$.

(c) Ist γ nullhomolog in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$?

(d) Ist γ nullhomolog in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\}$?

Falls die Antwort in (c) oder (d) "Nein" ist, geben Sie einen einfacheren, zu γ in Ω homologen Zykel wie in Folgerung 3.14 an. Falls die Antwort "Ja" ist, stellen Sie bitte die Kette $[\gamma]$ als Linearkombination nullhomotoper Kurven in Ω dar.

Aufgabe 4: Für $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden definiert man das *Doppelverhältnis* als

$$[z_1, z_2, z_3, z_4]\colon = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{C}.$$

Falls eine der Zahlen ∞ ist, kann man das Doppelverhältnis noch als Grenzwert definieren, z.B $[\infty, z_2, z_3, z_4] = \lim_{z_1 \to \infty} [z_1, z_2, z_2, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$. Zeigen Sie:

(a) (2 Punkte) Die paarweise verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ liegen genau dann auf einem Kreis, wenn $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.
(Unter einem "Kreis" in $\hat{\mathbb{C}}$ verstehen wir einen Kreis in $\mathbb{C}$ oder $g \cup \{\infty\}$ für eine Gerade g in $\mathbb{C}$.)

(b) (1 Punkt) Für alle Möbiustransformationen $M_A\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ und alle $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden gilt
$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [M_A(z_1), M_A(z_2), M_A(z_3), M_A(z_4)].$$

(c) (1 Punkt) Möbiustransformationen bilden Kreise in $\hat{\mathbb{C}}$ auf Kreise ab.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.