Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2014
26. Juni, 2014

Übungsblatt 8

Abgabe: Donnerstag, 3. Juli, 2014

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie an allen isolierten Singularitäten das Residuum:

$$(a)\ \tan z, \qquad (b)\ \frac{\sin z}{z^4}, \qquad (c)\ \frac{\sin z}{z^5}, \qquad (d)\ \frac{z}{\sin z}.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie:

$$(a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx, \qquad (b)\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}dx.$$

Aufgabe 3: Die folgenden Integrale lassen sich mit Methoden der Analysis I so umformen, dass man sie mit dem Residuensatz ausrechnen kann:

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}dx, \qquad (b)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx.$$

Aufgabe 4: Es sei $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ biholomorph, das heißt, dass f bijektiv ist, an allen Stellen $w \in \mathbb{C}$ und bei ∞ jeweils holomorph ist oder höchstens eine Polstelle besitzt (dort, wo der Wert ∞ angenommen wird). Zeigen Sie:

(a) (2 Punkte) Falls $f(\infty) = w \neq \infty$ ist, ist auch die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$$

biholomorph, mit $\infty \mapsto \infty$.

(b) (1 Punkt) Die Funktion aus (a) ist von der Form $z \mapsto pz + q$.

(c) (1 Punkt) Die Funktion f ist von der Form $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.