Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2014
3. Juli, 2014

Übungsblatt 9

Abgabe: Donnerstag, 10. Juli, 2014

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1: Es seien $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ stückweise glatt und $f,g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sowie $h\colon \mathrm{im}(f) \to \Omega$ holomorph. Zeigen Sie:

$$(a) \qquad \int_\gamma f'(z)g(z)dz = (f(z)g(z))\Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} - \int_\gamma f(z)g'(z)dz;$$

$$(b) \qquad \int_{f\circ\gamma} h(z)dz = \int_\gamma h(f(z))f'(z)dz.$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie $z \mapsto \mathrm{Log}(1-e^{2iz})$ auf

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x+iy \mid x \in \pi\mathbb{Z}, \quad y \leq 0\}.$$

Für $r>0$ bestehe c_r aus den geraden Strecken von r nach $\pi - r$, von $\pi + ir$ nach $\pi + \frac{i}{r}$, von $\pi + \frac{i}{r}$ nach $\frac{i}{r}$, und von $\frac{i}{r}$ nach ir, sowie den zwei passemdem Viertelkreisen um 0 und π vom Radius r.

(a) (1 Punkt) Skizzieren Sie c_r.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie:

$$0 = \lim_{r\to 0} \int_{c_r} \mathrm{Log}(1-e^{2iz})dz = \int_0^\pi \mathrm{Log}(1-e^{2ix})dx.$$

(c) Berechen Sie

$$\int_0^\pi \log(\sin x)\ dx.$$

Aufgabe 3: Begründen Sie, dass sich die folgenden Integrale mit dem Residuensatz bestimmen lassen, und berechnen Sie sie:

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+ix)}{1+x^2}dx, \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{2\pi} e^{\frac{\sin x - 3i/4}{\cos x - 5/4}}\ dx.$$

Aufgabe 4: Es seien $P(z)$ und $Q(z)$ Polynome vom Grad p bzw. q ohne gemeinsame Nullstellen.

(a) Wenn P nicht konstant ist, gilt

$$N(P, \widehat{\mathbb{C}}, w) = p \qquad \text{für alle } w \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

(b) Wenn $\dfrac{P}{Q}$ nicht konstant ist, gilt

$$N\left(\frac{P}{Q}, \widehat{\mathbb{C}}, w\right) = \max(p,q) \qquad \text{für alle } w \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.