Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2014
24. Juli, 2014

Übungsblatt 12

Abgabe: Donnerstag, 31. Juli, 2014

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1: Es sei g eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit höchstens einfachen Polen. Wir nehmen an, dass das Residuum an jedem Pol von g eine ganze Zahl ist. Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine meromorphe Funktion $f \neq 0$ auf $\mathbb{C}$, so dass $f'/f = g$.

(b) Falls $h \neq 0$ eine weitere meromorphe Funktion mit $h'/h = g$ ist, dann ist h/f konstant.

Aufgabe 2: Man definiert die Bernoulli-Zahlen $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Potenzreihe

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}. \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(a) (2 Punkte) Es gilt

$$\frac{B_0}{n!\ 1!} + \frac{B_1}{(n-1)!\ 1!} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{1!\ (n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 0 & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Hinweise: Betrachten Sie die Potenzreihe-Entwicklung von $\frac{z}{e^z-1} \cdot \frac{e^z-1}{z}$ und benutzen Sie Proposition 1.7 (2).

(b) (1 Punkt) $B_n = 0$ falls $n > 1$ und ungerade ist, und $B_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) (1 Punkt) Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gerade gilt es

$$2\zeta(n) = -B_n \frac{(2\pi i)^n}{n!}.$$

Hinweise: Setzen Sie in (1) $z = 2\pi i w$ und vergleichen Sie die Koeffizienten.

Aufgabe 3: Zeigen Sie (das letzte Gleichheitszeichen in Satz 5.22 im Skript):

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\ n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie:

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = \frac{2\pi}{3} \quad \text{und} \quad (b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin \pi/n}$$

für alle geraden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Hinweise: Nehmen Sie den Weg von 0 nach R, dann von R nach $Re^{2\pi i/n}$, und dann zurück nach 0. Oder benutzen Sie den allgemeinen Satz 3.25.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.