Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2014

Probeklausur

Sie dürfen die angegebenen Zwischenergebnisse verwenden, um die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten, auch wenn Sie die vorangegangenen Aufgabenteile noch nicht gelöst haben.

Aufgabe 1: Es seien α, β und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\alpha(t) = e^{\frac{\pi i t}{2}}\ , \qquad \beta(t) = 1 - t + ti\ , \qquad \gamma(t) = e^{2i\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}\ .$$

(a) Skizzieren Sie α, β und γ.

(b) Berechnen Sie

$$\int_\alpha \bar{z} \log z \, dz\ , \qquad \int_\beta \frac{dz}{z}\ , \qquad \int_\gamma \frac{\cosh z}{\sin z}\, dz\ .$$

Hinweis: Für jedes der drei obigen Integrale bietet sich ein anderer Rechenweg an.

Aufgabe 2: Wir betrachten die Funktion $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}\colon \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi i \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: für $r > 0$ hinreichend klein gibt es eine eindeutige holomorphe Funktion $\operatorname{artanh}\colon B_r(0) \to \mathbb{C}$ mit $\tanh(\operatorname{artanh} z) = z$ für alle $z \in B_r(0)$ und $\operatorname{artanh} 0 = 0$.

(b) Beweisen Sie, dass $\operatorname{artanh}'(z) = \frac{1}{1-z^2}$ für alle $z \in B_r(0)$.

(c) Entwickeln Sie artanh in eine Potenzreihe um $z = 0$ und geben Sie ihren Konvergenzradius an.

(d) Geben Sie ein möglichst großes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ an, auf das man artanh holomorph fortsetzen kann.

Aufgabe 3: Es seien f, $g\colon \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ stetig und auf $B_1(0)$ holomorph mit $|f(z)| = |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(a) Zeigen Sie: Wenn f und g in $\overline{B_1(0)}$ keine Nullstellen haben, existiert eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, so dass $g = cf$ auf ganz $\overline{B_1(0)}$.

(b) Geben Sie Funktionen f und g wie oben an, die Nullstellen in $B_1(0)$ haben dürfen, und so dass kein $c \in \mathbb{C}$ mit $g = cf$ existiert.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

(a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{5 - 3\sin t}\, dt\ ,$$

(b)
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+2)}\, dx\ .$$

Aufgabe 5:

(a) Berechnen Sie $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$.

(b) Zeigen Sie: $\Gamma\left(\frac{z}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{z+1}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{z+2}{4}\right)$, und $\Gamma\left(\frac{z+3}{4}\right)$ sind für $\operatorname{Re} z \in [1,2]$ beschränkt.

(c) Zeigen Sie:
$$4^{z-1}\Gamma\left(\frac{z}{4}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{z+2}{4}\right)\Gamma\left(\frac{z+3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(z).$$