Einführung in die mengentheoretische und algebraische Topologie

Skriptum von Dominik Stich zur Vorlesung 'Topologie' von Prof.Dr.Victor Bangert aus dem WS 2007/08 (Universität Freiburg)[1]

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

[1]Verbesserungsvorschläge an dominikstich@gmx.de

Inhaltsverzeichnis

Mengentheoretische Topologie

Wir beschäftigen uns in den ersten 9 Kapiteln hauptsächlich mit mengentheoretischer Topologie, die die Grundlage für ein tieferes Studium der Topologie bildet.

1 Topologische und metrische Räume

1.1 Definition einer Topologie

Im folgenden sei X eine Menge und $\mathscr{P}(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$ die zugehörige Potenzmenge.

Definition 1.1. *Ein* ***topologischer Raum*** *ist eine Menge X zusammen mit einer Teilmenge $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{P}(X)$ mit*

(i.) $\emptyset \in \mathscr{O}$, $X \in \mathscr{O}$

(ii.) *Ist $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen mit $V_i \in \mathscr{O}$, so gilt* $\bigcup\limits_{i\in I} V_i \in \mathscr{O}$

(iii.) $V_1 \in \mathscr{O}$, $V_2 \in \mathscr{O} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathscr{O}$

Bezeichnung: $\mathscr{O}$ heißt eine Topologie auf X und V heißt offen bezüglich $\mathscr{O}$ $:\Leftrightarrow V \in \mathscr{O}$

Definition 1.2. *Seien $\mathscr{O}$ und $\mathscr{O}'$ zwei Topologien auf X. $\mathscr{O}$ heißt* ***feiner*** *als $\mathscr{O}'$ $\Leftrightarrow$ $\mathscr{O}' \subseteq \mathscr{O} \Leftrightarrow \mathscr{O}'$ ist* ***gröber*** *als $\mathscr{O}$*

Beispiel 1.3. *Die göbste Topologie auf X ist gegeben durch: $\mathscr{O} = \{\emptyset,\ X\}$*
Die feinste Topologie auf X ist gegeben durch: $\mathscr{O} = \mathscr{P}(X)$

Definition 1.4. *Eine Menge X mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt* ***metrischer Raum****, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:*

(i.) $d(x, y) \geq 0$ *und* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii.) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii.) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Bezeichnung:

- $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Distanzfunktion auf X oder **Metrik** auf X.
- $d(x, y)$ heißt Abstand von x und y (bezüglich d)
- Ist $x \in X$, $\epsilon > 0$ so heißt $B^d(x, \epsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ der **ϵ-Ball um** x bezüglich d. Wenn klar ist, welche Metrik zu Grunde liegt, schreiben wir nur $B(x, \epsilon)$

Definition 1.5. *Sei V ein $\mathbb{R}-$ oder $\mathbb{C}-$Vektorraum. Eine Abbildung $||.|| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm, falls $\forall x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) gilt:*

(i.) $||x|| \geq 0$ *und* $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii.) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$

(iii.) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

V heißt dann ein normierter Vektorraum.

Bemerkung: Sei $(V, ||.||)$ ein normierter VR, dann definiert $d(x, y) = ||x - y||$ eine Metrik auf V (induzierte Metrik)

Beispiel 1.6. *(i.)* $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

(ii.) $X = \mathbb{R}^n$,$\|.\|$ *Norm auf* $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) := \|x - y\|$

(iii.) $X = V$ *normierter* $\mathbb{R}-$ *oder* $\mathbb{C}-$ *Vektorraum,* $d(x, y) = \|x - y\|$
z.B. $V = C^1([a, b], \mathbb{R})$ *mit den Normen*
$\|f\|_{C^0} := \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$
$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0}$

(iv.) Es sei $X = S^2 := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 = 1\right\}$ *und* $< \cdot, \cdot >$ *das Standardskalarprodukt auf dem* $\mathbb{R}^n$*, Definiere für* $x, y \in S^2$:
$d(x, y) := \arccos(\langle x, y\rangle) \in [0, \pi]$, *den Winkel zwischen* x *und* y

Definition 1.7. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Die von* d *auf* X ***induzierte Topologie*** $\mathscr{O} := \mathscr{O}(d)$ *ist definiert durch*

$$V \in \mathscr{O}(d) \Leftrightarrow V \subseteq X \, und \, \forall x \in V \; \exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subseteq V$$

Wir werden im Folgenden immer davon ausgehen, dass ein metrischer Raum mit dieser Topologie versehen ist.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\mathscr{O}(d)$ eine Topologie definiert.
Dass $\emptyset, X \in \mathscr{O}(d)$ sind, ist offensichtlich.
Seien $(V_i)_{i\in I}$, $V_i \in \mathscr{O}(d)$, $\quad$ Z: $\bigcup\limits_{i\in I} V_i \in \mathscr{O}(d)$
Sei also $x \in \bigcup\limits_{i\in I} V_i \Rightarrow \; \exists j \in I : x \in V_j \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subseteq V_j \Rightarrow B(x, \epsilon) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} V_i \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} V_i \in \mathscr{O}(d)$
Seien nun $V_1, V_2 \in \mathscr{O}(d)$, $\quad$ Z: $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{O}(d)$
Sei $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x \in V_1 \wedge x \in V_2 \Rightarrow \exists \epsilon_1, \epsilon_2 : B(x, \epsilon_1) \subseteq V_1, B(x, \epsilon_2) \subseteq V_2 \Rightarrow B(x, \min(\epsilon_1, \epsilon_2)) \subseteq V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathscr{O}(d)$ □

Bemerkung: Sei $(V, ||.||)$ ein normierter VR, dann bezeichnet man die von der induzierten Metrik induzierte Topologie, auch wieder als die induzierte Topologie auf V.

Lemma 1.8. *Seien* d *und* d' *Metriken auf* X*. Es existiere* $a > 0$ *mit* $d \leq ad'$ *(d.h.* $\forall x, y \in X : \; d(x, y) \leq ad'(x, y)$*) dann ist* $\mathscr{O}(d)$ *feiner als* $\mathscr{O}(d')$

Beweis. Sei $V \in \mathscr{O}(d')$
$x \in V \Rightarrow \; \exists \epsilon > 0 : B^{d'}(x, \epsilon) \subseteq V$
es gilt:
$d(x, y) < \frac{\epsilon}{a} \Rightarrow d'(x, y) \leq ad(x, y) < \epsilon$ und damit $y \in B^d(x, \frac{\epsilon}{a}) \Rightarrow y \in B^{d'}(x, \epsilon)$
also ist $B^d(x, \frac{\epsilon}{a}) \subseteq B^{d'}(x, \epsilon)$
$\Rightarrow B^d(x, \frac{\epsilon}{a}) \subseteq B^{d'}(x, \epsilon) \subseteq V \;\; \Rightarrow V \in \mathscr{O}(d)$ □

Definition 1.9. *(i.) Zwei Metriken* d, d' *auf* X *heißen* ***äquivalent****, genau dann wenn* $a > 0$, $b > 0$ *existieren, mit:* $ad \leq d' \leq bd$

(ii.) *Zwei Normen* $\|.\|, \|.\|'$ *auf einem* $\mathbb{R}-$ *oder* $\mathbb{C}-$ *Vektorraum* V *heißen* ***äquivalent****, genau dann wann* $a > 0,\ b > 0$ *existieren, mit:*
$\forall x \in V : a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|$

Bemerkung: $\|.\|, \|.\|'$ äquivalent $\Rightarrow d(x,y) := \|x-y\|$ und $d'(x,y) := \|x-y\|'$ sind äquivalent

Folgerung 1.10. *Äquivalente Normen, bzw. Metriken induzieren die gleiche Topologie.*

Beweis. folgt unmittelbar aus Lemma 1.8 $\square$

Bemerkung: Aus der Analysis ist bekannt, dass Normen auf endlich dimensionalen $\mathbb{R}-$ bzw. $\mathbb{C}$ Vektorräumen äquivalent sind, demnach induzieren beliebige Normen auf diesen Räumen die gleiche Topologie.
Diese nennt man dann die **übliche Topologie** auf dem Vektorraum.

Dies gilt im allgemeinen NICHT bei unendlich dimensionalen Vektorräumen, denn es sind zum Beispiel die Normen $\|.\|_{C^0}$ und $\|.\|_{C^1}$ auf $C^1([0,2\pi],\mathbb{R})$ nicht äquivalent.
denn:

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{n}\sin(nx)\|_{C^0} &= \frac{1}{n} \to 0\\ \|\frac{1}{n}\sin(nx)\|_{C^1} &= \frac{1}{n} + \|\cos(nx)\|_{C^0} = 1 + \frac{1}{n} \to 1\end{aligned}$$

Definition 1.11. *Sei auf* $\mathbb{R}^{n+1}$ *eine Norm* $|.|$ *gewählt, dann definieren wir*

$$S^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |x| = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Beachte,dass die Gestalt Menge S^n*, im Gegensatz zur Topologie, von der Norm abhängt.* S^1 *kann ein Kreis (bzgl. der euklidischen Norm) oder ein Quadrat (bzgl. der Maximumsnorm) sein.*

Schreiben wir für $n \geq 1$ *und* n *ungerade:* $S^n \subseteq \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$ *so ist*

$$S^n = \{z \in \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}} \mid |z| = 1\}$$

mit einer Norm $|.|$ *auf* $\mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$

Lemma 1.12. *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum,* $x \in X, \epsilon > 0$*. Dann ist* $B(x,\epsilon) \in \mathscr{O}(d)$

Beweis. Sei $y \in B(x,\epsilon)$, Z.z. $\exists \epsilon' > 0 : B(y,\epsilon') \subseteq B(x,\epsilon)$
Definiere $\epsilon' := \epsilon - d(x,y)$
Sei nun $z \in B(y,\epsilon') \Leftrightarrow d(y,z) < \epsilon' = \epsilon - d(x,y) \Leftrightarrow d(y,z) + d(x,y) < \epsilon$
$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \epsilon \Rightarrow z \in B(x,\epsilon) \Rightarrow B(y,\epsilon') \subseteq B(x,\epsilon)$ $\square$

Bemerkung: Es stellt sich die Frage für welche topologischen Räume $(X,\mathscr{O})$ eine Metrik d existiert, so dass $\mathscr{O} = \mathscr{O}(d)$ ist. Dies wird als Metrisierbarkeitsproblem bezeichnet. Man wird später sehen, dass kompakte Hausdorffräume mit abzählbarer Basis metrisierbar sind.
Es sei auch bemerkt, dass nicht jeder topologische Raum metrisierbar ist, denn wenn $\#X > 2$ ist und $\mathscr{O} := \{\emptyset, X\}$ so kann für keine Metrik $\mathscr{O} = \mathscr{O}(d)$ gelten, denn angenommen d ist Metrik auf X, dann gilt $d(x,y) > 0$ für beliebige $x \neq y$ und damit ist $y \notin B(x,d(x,y))$ aber nach Lemma 1.12 ist $B(x,d(x,y)) \in \mathscr{O}(d)$ und deshalb $\mathscr{O} \neq \mathscr{O}(d)$.

1.2 Grundlegende topologische Begriffe

Definition 1.13. *Sei $(X, \mathscr{O})$ topologischer Raum.*

(i.) *Eine Teilmenge $C \subseteq X$ heißt* ***abgeschlossen*** *(bezüglich $\mathscr{O}$) $:\Leftrightarrow X \setminus C$ offen (bezüglich $\mathscr{O}$) ist.*

(ii.) *Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt* ***Umgebung von*** *$x :\Leftrightarrow \exists V \in \mathscr{O} : x \in V \subseteq U$*

Beispiel 1.14. *$X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b \Rightarrow [a, b]$ ist abgeschlossen, denn: $[a, b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$*
und es gilt $(a, b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ ist offen in $\mathbb{R}$ nach Lemma 1.12

Lemma 1.15. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Es gilt:*
$A \subseteq X$ ist offen $\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists$ Umgebung U_x von x mit $x \in U_x \subseteq A$
Insbesondere gilt dann also: $A = \bigcup\limits_{x \in A} U_x$

Beweis. klar $\square$

Lemma 1.16. *Es sei (X, d) ein metricher Raum, dann gilt f"ur $x \in X$ und $\epsilon > 0$, dass*

$$C := \left\{ y \in X \,\middle|\, d(x, y) \leq \epsilon \right\}$$

abgeschlossen ist bezüglich $\mathscr{O}(d)$

Beweis. $\mathbb{Z}$: $X \setminus C = \left\{ y \in X \,\middle|\, d(x, y) > \epsilon \right\}$ ist offen.
Sei $z \in X \setminus C$ und $\epsilon' := d(x, z) - \epsilon > 0$. Sei $w \in B(z, \epsilon') \Rightarrow d(x, w) \geq d(x, z) - d(w, z) > d(x, z) - \epsilon' = \epsilon \Rightarrow w \in X \setminus C \Rightarrow B(z, \epsilon') \subseteq X \setminus C$ $\square$

Lemma 1.17. *Es gilt:*

(i.) *$(C_i)_{i \in I}$ abgeschlossen $\Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} C_i$ abgeschlossen*

(ii.) *C_1, C_2 abgeschlossen $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ abgeschlossen*

(iii.) *U Umgebung von $x \in X$ und $U \subseteq U' \subseteq X \Rightarrow U'$ Umgebung von x*

(iv.) *U_1, U_2 Umgebungen von $X \Rightarrow U_1 \cap U_2$ Umgebung von x*

Beweis. klar bzw. Übung $\square$

Definition 1.18. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. Dann heißt*

(i.)

$$\mathring{A} := \bigcup_{V \subseteq A,\ V \in \mathscr{O}} V$$

offener Kern oder Inneres von *A. $x \in \mathring{A}$ heißt innerer Punkt von A.*

(ii.)

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subseteq C \subseteq X,\ X \setminus C \in \mathscr{O}} C$$

abgeschlossene Hülle oder Abschluß von *A*

(iii.)

$$\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

***Rand von** A. $x \in \partial A$ heißt Randpunkt von A*

Beispiel 1.19. *Es sei $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Topologie gegeben.*

(i.) $A := [0,1] \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathring{A} &= (0,1) \times (0,1)\\ \overline{A} &= [0,1] \times [0,1]\\ \partial A &= \{0,1\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0,1\}\end{aligned}$$

(ii.) $A = [0,1) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \ \mathring{A} = \emptyset, \quad \overline{A} = [0,1] \times \{0\}, \quad \partial A = \overline{A}$

Lemma 1.20. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Dann gilt:*

(i.) $\mathring{A} \subseteq A$ *ist offen und ist die größte in A enthaltene offene Menge.*

(ii.) $\overline{A} \supseteq A$ *ist abgeschlossen und ist die kleinste A umfassende abgeschlossene Menge.*

(iii.) $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow A$ *Umgebung von x*

(iv.) $\overline{A} = X \setminus \left((X \overset{\circ}{\setminus} A) \right)$
$\mathring{A} = X \setminus \left(\overline{X \setminus A} \right)$

Beweis. Übung □

Lemma 1.21. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum $A, B \subseteq X$, $A_i \subseteq X \ \forall i \in I$. Dann gilt:*

(i.) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(ii.) $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

(iii.) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$

(iv.) $\bigcup_{i \in I} \mathring{A}_i \subseteq \left(\overset{\circ}{\bigcup_{i \in I} A_i} \right)$

Beweis. Übung. □

<u>Bemerkung:</u> Es sei bemerkt, dass in den Fällen (iii.) und (iv.) im allgemeinen keine Gleichheit gilt, auch nicht für endliches I.
Ein Beispiel hierfür:
$A := [0,1)$ und $B := [1,2]$. Dann ist $\overline{A} = [0,1]$ sowie $\overline{B} = B$ und damit $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$ aber $\overline{A \cap B} = \emptyset$

Lemma 1.22. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\mathring{A} &= \left\{ x \in A \;\middle|\; \exists U \in \mathscr{O} : x \in U \subseteq A \right\}\\ &= \left\{ x \in A \;\middle|\; \exists \textit{Umgebung } U \textit{ von } x \textit{ mit } U \subseteq A \right\}\\ \overline{A} :&= \left\{ x \in X \;\middle|\; \forall V \in \mathscr{O} \textit{ mit } x \in V : V \cap A \neq \emptyset \right\}\\ &= \left\{ x \in X \;\middle|\; \forall \textit{ Umgebungen } U \textit{ von } x \textit{ gilt } U \cap A \neq \emptyset \right\}\end{aligned}$$

Beweis. Es wird nur die Gleichheit

$$\overline{A} = \underbrace{\left\{x \in X \;\middle|\; \forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\right\}}_{:=B}$$

exemplarisch gezeigt.
$\mathbb{Z}\mathbb{Z}:\ \overline{A} \subseteq B$
Sei $x \in \overline{A}$. Sei $U \subseteq X$ eine Umgebung von x. Dann existiert $V \subseteq X$ offen mit $x \in V \subseteq U \Rightarrow C := X \setminus V$ abgeschlossen.
Annahme: $U \cap A = \emptyset$
$\Rightarrow V \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subseteq X \setminus V = C \Rightarrow \overline{A} \subseteq C = X \setminus V$
Dies ist aber ein Widerspruch, da $x \in \overline{A}$ und $x \in V$
$\mathbb{Z}\mathbb{Z}:\ B \subseteq \overline{A}$
Sei $x \in B$. Sei C abgeschlossen mit $A \subseteq C$
Annahme: $x \notin C \Rightarrow x \in X \setminus C =: V$ offen. V ist Umgebung von $x \overset{x \in B}{\Rightarrow} V \cap A \neq \emptyset$
Widerspruch, da $A \subseteq C$ und deshalb $V \cap A = \emptyset$ ☐

Beispiel 1.23. *Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter $\mathbb{R}-$ Vektorraum, $x \in V$, $\epsilon > 0$.*
Dann gilt:

$$\overline{B(x,\epsilon)} = \left\{y \in V \;\middle|\; \|x-y\| \leq \epsilon\right\}$$

sowie

$$\partial B(x,\epsilon) = \left\{y \in V \;\middle|\; \|x-y\| = \epsilon\right\}$$

*In metrischen Räumen gilt dies im allgemeinen **nicht**.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Gleichheit, die Zweite folgt dann sofort.
„$\subseteq$“ nach Lemma 1.16 ist $\left\{y \in V \;\middle|\; \|x-y\| \leq \epsilon\right\}$ abgeschlossen und deshalb folgt $\overline{B(x,\epsilon)} \subseteq \left\{y \in V \;\middle|\; \|x-y\| \leq \epsilon\right\}$ nach Definition des Abschlusses.
„$\supseteq$“ Sei U eine Umgebung von $y \in V$ mit $\|x-y\| \leq \epsilon \Rightarrow \exists \epsilon' > 0 : B(y,\epsilon') \subseteq U$
Wähle ϵ' s.d. $\epsilon' < \epsilon$.
Nach (1.22) reicht es zu zeigen, dass $B(y,\epsilon') \cap B(x,\epsilon) \neq \emptyset$
Definiere dazu $z := y + \frac{\epsilon'}{2} \cdot \frac{x-y}{\epsilon}$
$\Rightarrow \|z-y\| \leq \frac{\epsilon'}{2} < \epsilon' < \epsilon \Rightarrow z \in B(y,\epsilon')$
$\|z-x\| = \|y - x - \frac{\epsilon'}{2} \cdot \frac{x-y}{\epsilon}\| = \underbrace{(1 - \frac{\epsilon'}{2\epsilon})}_{>0} \underbrace{\|y-x\|}_{\leq \epsilon} \leq \epsilon - \frac{\epsilon'}{2} \Rightarrow z \in B(x,\epsilon) \Rightarrow$
$z \in B(y,\epsilon') \cap B(x,\epsilon)$ ☐

Bemerkung:

(i.) Insbesondere ist also $S^n = \partial B(0,1)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n+1}$

(ii.) Eine etwas handlichere alternative Definition von $\overline{A}$ wird sich später durch Einführung von Folgen und Grenzwerten von Folgen ergeben.
Man wird sehen, dass in metrischen Räumen die Punkte $y \in \overline{A}$ genau die sind für die eine Folge $(y_n) \subseteq A$ existiert, die gegen y konvergiert.

Definition 1.24. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.*
*A heißt **dicht in** X, falls $\overline{A} = X$ gilt.*

Beispiel 1.25. *(i.)* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

(ii.) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *ist offen und dicht in* $\mathbb{R}$

(iii.) *Eine interessante* ***offene und dichte*** *Menge* $V \subseteq \mathbb{R}$*:*
Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Abzählung von* $\mathbb{Q}$ *und* $\epsilon > 0$ *sowie*
$I_n := \left(q_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right) \subseteq \mathbb{R}$
Definiere $V := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$*. Diese ist offen und enthält* $\mathbb{Q} \overset{(i.)}{\Rightarrow} \overline{V} = \mathbb{R}$*.*
Es gilt $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \Rightarrow \lambda(V) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) = \epsilon$
wobei λ *das Lebesguemaß auf* $\mathbb{R}$ *ist.*
V *ist also eine maßtheoretisch kleine, aber topologisch große Menge.*

2 Konstruktion von topologischen Räumen

In diesem Abschnitt sollen einige wichtige Konstruktionen vorgestellt werden, die mit gegebenen topologischen Räumen vollzogen werden können.
Insbesondere sollen die Unterraum-, Summen- und Produkttopologie konstruiert werden.

2.1 Unterraum- und Summentopologie

Definition 2.1. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$.*
Dann definiert $\mathscr{O}_A := \big\{A \cap V \big| V \in \mathscr{O}\big\} \subseteq \mathscr{P}(A)$ die von $\mathscr{O}$ auf A induzierte Topologie, oder ***Unterraumtopologie****.*

Beweis. (i.) $A = A \cap X \in \mathscr{O}_A$
$\emptyset = A \cap \emptyset \in \mathscr{O}_A$

(ii.) $\bigcup\limits_{i \in I} (A \cap V_i) = A \cap (\bigcup\limits_{i \in I} V_i) \in \mathscr{O}_A$

(iii.) $\bigcap\limits_{i=1}^{2} (A \cap V_i) = A \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{2} V_i) \in \mathscr{O}_A$

□

<u>Sprechweise:</u> $W \subseteq A$ offen in $A :\Leftrightarrow W \in \mathscr{O}_A$

$B \subseteq A$ abgeschlossen in $A :\Leftrightarrow A \setminus B \in \mathscr{O}_A$
$\Leftrightarrow \exists C \subseteq X$ abgeschlossen bezüglich $\mathscr{O}$: $B = A \cap C$

Beispiel 2.2. *(i.)* $X = \mathbb{R},\ A = [0,1]$
$\Rightarrow [0,1]$ *ist offen und abgeschlossen in* $[0,1]$
$[0, \frac{1}{2})$ *ist offen in* $[0,1]$*, da* $[0, \frac{1}{2}) = (-\infty, \frac{1}{2}) \cap [0,1]$

(ii.) (X, d) *metrischer Raum und* $A \subseteq X$
Dann folgt, dass die von der Metrik $d_A := d_{|A \times A}$ *auf* A *induzierte Topologie gerade* $\mathscr{O}_A$ *ist.*
d.h. $\mathscr{O}(d_A) = \mathscr{O}(d)_A$
Bemerke: $\mathscr{O}(d_A) = \big\{B \subseteq A \;\big|\; \forall x \in B\ \exists \epsilon > 0 :\ \{y \in \underline{A} \;\big|\; d_A(x,y) < \epsilon\} \subseteq B\big\}$

(iii.) $X = \mathbb{R}^3$ *mit der üblichen Topologie und* $A := S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$*. Dann gilt:*
$U \subseteq S^2$ *ist offen bzgl. der induzierten Topologie*
$\Leftrightarrow \big\{tx \;\big|\; x \in U,\ t \in (0, \infty)\big\}$ *in* $\mathbb{R}^3$ *offen ist.*

Beweis. zu (ii.):

Zeige $\mathscr{O}(d_A) \subseteq \mathscr{O}(d)_A$:
Sei $V \subseteq A,\ V \in \mathscr{O}(d_A) \Rightarrow \forall x \in V\ \exists \epsilon_x :\ \{y \in A \;\big|\; d_A(x,y) < \epsilon_x\} \subseteq V$.
$\tilde{V} := \bigcup\limits_{x \in V} \{y \in X \;\big|\; d(x,y) < \epsilon_x\}$ offen bzgl. $\mathscr{O}(d)$ und es ist $V = \tilde{V} \cap A$
$\Rightarrow V \in \mathscr{O}(d)_A$
Zeige nun $\mathscr{O}(d_A) \supseteq \mathscr{O}(d)_A$:
Sei $W \in \mathscr{O}(d)_A \Rightarrow W = A \cap V$ mit $V \in \mathscr{O}(d)$
Sei $x \in W \Rightarrow x \in A \wedge x \in V \Rightarrow \exists \epsilon > 0 :\ B(x,\epsilon)\{y \in X \;\big|\; d(x,y) < \epsilon\} \subseteq V$
$\Rightarrow A \cap B(x,\epsilon) \subseteq A \cap V$ und es gilt $A \cap B(x,\epsilon) = \{y \in A \;\big|\; d(x,y) < \epsilon\} = \{y \in A \;\big|\; d_A(x,y) < \epsilon\}$
$\Rightarrow W \in \mathscr{O}(d_A)$ □

Lemma 2.3. *Sei $(X, \mathscr{O})$ topologischer Raum $B \subseteq A \subseteq X$. Dann gilt:*

(i.) $\mathscr{O}_B = (\mathscr{O}_A)_B$

(ii.) *Ist $A \subseteq X$ offen, so gilt: $B \subseteq A$ offen in $A \Leftrightarrow B \subseteq A$ offen in X*
Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, so gilt: $C \subseteq A$ abgeschlossen in $A \Leftrightarrow C \subseteq A$ abgeschlossen in X

Beweis. klar □

Definition 2.4. *Seien $(X, \mathscr{O}_X)$ und $(Y, \mathscr{O}_Y)$ topologische Räume und $X \cap Y = \emptyset$*
Dann heißt $\mathscr{O}_{X \cup Y} := \{U \cup V \mid U \in \mathscr{O}_X,\ V \in \mathscr{O}_Y\} \subseteq \mathscr{P}(X \cup Y)$ die ***Summentopologie*** *auf $X \cup Y$*

Bemerkung:

(i.) $W \in \mathscr{O}_{X \cup Y} \Leftrightarrow W \cap X \in \mathscr{O}_x \wedge W \cap Y \in \mathscr{O}_Y$

(ii.) X und Y sind offen und abgeschlossen bezüglich $\mathscr{O}_{X \cup Y}$

Definition 2.5. *Sei $(X, \mathscr{O})$ topologischer Raum.*

(i.) *Eine Teilmenge $\mathscr{B}$ von $\mathscr{O}$ heißt (eine)* ***Basis*** *von $\mathscr{O}$*
$\Leftrightarrow \forall V \in \mathscr{O}\ \forall x \in V\ \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq V$

(ii.) *Eine Teilmenge $\mathscr{S}$ von $\mathscr{O}$ heißt (eine)* ***Subbasis*** *von $\mathscr{O}$*
$\Leftrightarrow \{S_1 \cap ... \cap S_n \mid n \in \mathbb{N},\ S_i \in \mathscr{S}\}$ *eine Basis von X bildet.*

Bemerkung: Sei $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathscr{O}$ auf X. Dann gilt:

$$V \in \mathscr{O} \Leftrightarrow \forall x \in V \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq V$$

Insbesondere also:

$$\mathscr{O} := \{V \subseteq X \mid \forall x \in V \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq V\}$$

Beispiel 2.6. *(i.)* *(X, d) metrischer Raum $\Rightarrow \mathscr{B} = \{B(x, \epsilon) \mid x \in X,\ \epsilon > 0\}$ ist Basis von $\mathscr{O}(d)$*
Speziell $X = \mathbb{R}$, dann ist $\mathscr{B} = \{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\}$ ist Basis der üblichen Topologie

(ii.) *$\mathscr{B} = \{B(x, r) \mid x \in \mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ ist* ***abzählbare*** *Basis der üblichen Topologie des $\mathbb{R}^n$*

Lemma 2.7. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $\mathscr{T}$ eine andere Topologie auf X.*
Sei $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathscr{O}$ und $\mathscr{T} \Rightarrow \mathscr{O} = \mathscr{T}$
(D.h. eine Basis legt eine Topologie vollständig fest)

Beweis. Zeige $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{T}$:
Sei $V \in \mathscr{O} \Rightarrow \forall x \in V \exists B_x \in \mathscr{B} :\ x \in\ B_x \subseteq V \Rightarrow V = \bigcup\limits_{x \in V} B_x$
Da $\forall x \in X$: $B_x \in \mathscr{T} \Rightarrow V \in \mathscr{T} \Rightarrow \mathscr{O} \subseteq \mathscr{T}$
Die zweite Inklusion folgt analog. □

Lemma 2.8. *Seien $\mathscr{B}$ und $\widetilde{\mathscr{B}}$ Basen von $\mathscr{O}$ bzw. $\widetilde{\mathscr{O}}$ mit $\mathscr{B} \subseteq \widetilde{\mathscr{B}}$.*
Dann folgt $\mathscr{O} \subseteq \widetilde{\mathscr{O}}$

Beweis. Sei $V \in \mathscr{O}$. Dann existiert für jedes $x \in V$ ein $B_x \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq V \Rightarrow V = \bigcup\limits_{x \in V} B_x$.
Da $\forall x :\ B_x \in \widetilde{\mathscr{B}} \Rightarrow V \in \widetilde{\mathscr{O}}$ □

Lemma 2.9. *$(X, \mathscr{O})$ topologischer Raum mit Basis $\mathscr{B}$. Dann gilt:*
(i.) $\bigcup \mathscr{B} := \bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} B = X$
(ii.) $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ *und* $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B \in \mathscr{B},\ x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$

Beweis. zu (i.): $X \in \mathscr{O} \Rightarrow \forall x \in X \ \exists B_x \in \mathscr{B} : x \in B_x \subseteq X \Rightarrow X \subseteq \bigcup \mathscr{B}$
Die andere Inklusion ist klar.

zu (ii.): $B_1, B_2 \in \mathscr{B} \Rightarrow B_1, B_2 \in \mathscr{O} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathscr{O}$
Sei nun $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ □

Satz 2.10. *Sei X eine Menge und $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ erfülle*

(i.) $\bigcup \mathscr{B} = X$

(ii.) $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ *und* $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B \in \mathscr{B},\ x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$

*Dann existiert **genau eine** Topologie $\mathscr{O}$ auf X, so dass $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathscr{O}$ ist.*
Bezeichnung: $\mathscr{O}(\mathscr{B})$

Beweis. Zur Eindeutigkeit: siehe Lemma 2.7
Zur Existenz:
Definiere $\mathscr{O} := \{V \subseteq X \mid \forall x \in V \ \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq V\}$
Es ist nun nur noch zu zeigen, dass $\mathscr{O}$ eine Topologie definiert.

(i.) $X \in \mathscr{O}$ nach Voraussetzung (i.). $\emptyset \in \mathscr{O}$ ist klar.

(ii.) $(V_i)_{i\in I},\ V_i \in \mathscr{O}$ $\mathbb{Z}$: $\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathscr{O}$
Sei $x \in \bigcup_{i\in I} V_i \Rightarrow \exists j \in I:\ x \in V_j \Rightarrow \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq V_j \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$

(iii.) V_1, V_2 $\mathbb{Z}$; $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{O}$
Falls $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ist es klar.
Sonst, sei $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x \in V_i, (i = 1, 2) \Rightarrow \exists B_i, (i = 1, 2):\ x \in B_i \subseteq V_i, (i = 1, 2) \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \subseteq V_1 \cap V_2 \Rightarrow \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq V_1 \cap V_2$

□

2.2 Die Produkttopologie

Sei I eine beliebige Indexmenge. $(X_i)_{i\in I}$ ein System von Mengen, dann ist

$$\prod_{i\in I} X_i := \left\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \;\middle|\; \forall i \in I : x_i := x(i) \in X_i \right\}$$

Hierbei wird für $I = \{1, 2, ..., n\}$ meist die Tupelschreibweise $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ benutzt.

Spezialfall: $\forall i \in I : X_i = X$
Dann ist $X^I := \prod_{i\in I} X_i = \{x \mid x : I \to X\}$
(alle Abbildungen von I nach X)

Bemerkung: Das Auswahlaxiom besagt:

$$X_i \neq \emptyset \ \forall i \in I \Rightarrow \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$$

Umgekehrt: gilt $X_j = \emptyset$ für ein $j \in I \Rightarrow \prod_{i\in I} X_i = \emptyset$

Definition 2.11. *Seien $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ topologische Räume.*
Dann erfüllt

$$\mathscr{B} := \left\{ \prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; V_i \in \mathscr{O}_i,\ V_i \neq X_i \text{ nur endlich oft} \right\}$$

*die Voraussetzungen von Satz 2.10 und $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ bezeichnet man als die **Produkttoplogie** auf $X := \prod\limits_{i\in I} X_i$*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\mathscr{B}$ die Voraussetzungen aus (2.10) erfüllt.
Es ist $X \in \mathscr{B}$ da man $\forall i : V_i = X_i$ setzen kann, damit gilt (i.) aus (2.10)
Seien nun $B_1 := \prod\limits_{i\in I} V_i$ und $B_2 = \prod\limits_{i\in I} W_i$ aus $\mathscr{B}$.
D.h. es gilt $V_i \in \mathscr{O}_i$ und $V_i \neq X_i$ nur für $i \in E_1 \subseteq I$ mit endlichem E_1, sowie $W_i \in \mathscr{O}_i$ und $W_i \neq X_i$ nur für $i \in E_2 \subseteq I$ mit endlichem E_2.
Dann ist $B_1 \cap B_2 = \prod\limits_{i\in I} V_i \cap W_i \Rightarrow V_i \cap W_i \in \mathscr{O}_i$ und $V_i \cap W_i \neq X_i$ nur für $i \in E_1 \cup E_2 \subseteq I$ und $E_1 \cup E_2$ endlich.
$\Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$ und (ii.) aus (2.10) ist erfüllt. $\square$

Bemerkung:

$$V \subseteq \prod_{i\in I} X_i \text{ offen} \quad \Leftrightarrow \forall x \in V\ \exists V_i \in \mathscr{O}_i,\ i \in I \text{ mit}$$
$$\text{(i.) Für höchstens endlich viele } i \in I : V_i \neq X_i$$
$$\text{(ii.) } x \in \prod_{i\in I} V_i \subseteq V$$

Lemma 2.12. *Seien $(X_i, d_i),\ i = 1, 2, ..., n$ metrische Räume. Definiere für $x, y \in \prod\limits_{i=1}^{n} X_i =: X$ eine Metrik auf X durch*

$$d(x, y) := \max_{1\leq i\leq n} d_i(x_i, y_i)$$

Dann gilt: $\mathscr{O}(d)$ ist gleich der Produkttopologie der $\mathscr{O}(d_i)$

Beweis. Es ist zunächst zu zeigen, dass d eine Metrik ist. Dieser einfache Beweis sei aber als Übung dem Leser überlassen.
Wir zeigen das $\mathscr{O}(d)$ gleich der Produkttopologie $\mathscr{O}$ ist.
Zeige $\mathscr{O}(d) \subseteq \mathscr{O}$:
Es ist $\mathscr{B} := \{B^d(x, \epsilon) \mid x \in X,\ \epsilon > 0\}$ eine Basis der Topologie $\mathscr{O}(d)$
und $\widetilde{\mathscr{B}} := \{\prod\limits_{i=1}^{n} V_i \mid V_i \in \mathscr{O}(d_i)\}$ eine Basis von $\mathscr{O}$.
Nach Lemma 2.8 reicht es zu zeigen, dass $\mathscr{B} \subseteq \widetilde{\mathscr{B}}$ ist.
Es ist aber $B^d(x, \epsilon) = \prod\limits_{i=1}^{n} B^{d_i}(x_i, \epsilon) \Rightarrow B^d(x, \epsilon) \in \widetilde{\mathscr{B}}$
$\Rightarrow \mathscr{B} \subseteq \widetilde{\mathscr{B}} \Rightarrow \mathscr{O}(d) \subseteq \mathscr{O}$

Es ist noch $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{O}(d)$ zu zeigen:
Sei $B = \prod\limits_{i=1}^{n} V_i \in \widetilde{\mathscr{B}}$ mit $V_i \in \mathscr{O}(d_i)$
$x \in B \Rightarrow x_i \in V_i,\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \Rightarrow \exists \epsilon_i > 0 : B^{d_i}(x_i, \epsilon_i) \subseteq V_i,\ i = 1, 2, ..., n$
Wähle $\epsilon := \min\limits_{1\leq i\leq n} \epsilon_i \Rightarrow B^{d_i}(x_i, \epsilon) \subseteq V_i,\ i = 1, 2, ..., n$
$\Rightarrow B^d(x, \epsilon) = \prod\limits_{i=1}^{n} B^{d_i}(x_i, \epsilon) \subseteq B \Rightarrow B \in \mathscr{O}(d) \Rightarrow \widetilde{\mathscr{B}} \subseteq \mathscr{O}(d) \Rightarrow \mathscr{O} \subseteq \mathscr{O}(d)$ $\square$

Bemerkung:

(i.) Insbesondere zeigt das letzte Lemma:

Die übliche Topologie (bezüglich einer beliebigen Metrik!) auf $\mathbb{R}^n$ ist gleich der Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ (d.h. die Produkttopologie der üblichen Topologien auf $\mathbb{R}$)

(ii.) Schon in $\mathbb{R}^2$ gilt, dass die Basis der Produkttopologie nicht die ganze Topologie ist, da $\{x \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ offen, aber keine Basismenge, ist.

(iii.) $(X_i)_{i \in I}$ seien topologische Räume mit Topologien $\mathscr{O}_i$. Seien $A_i \subseteq X_i$, $A := \prod\limits_{i \in I} A_i$ und $\mathscr{O}$ die Produkttopologie auf $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$.

Dann gilt: $\mathscr{O}_A$ (Spurtopologie in X) = Produkttopologie der Spurtopologien $(\mathscr{O}_i)_{A_i}$

Beweis. Die rein technische Behauptung (ii.) sei dem Leser als Übung überlassen. □

Beispiel 2.13. *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n := \{0, 1\}$*
$\mathscr{O}_n := \mathscr{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$
$X := \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ *(Bezeichnung $f_n = f(n)$)*
Dann gilt:

$U \subseteq X$ Umgebung (bzgl. Produkttopologie $\mathscr{O}$) von $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$: Ist $g \in X$ und gilt $g_n = f_n$ für $n \leq n_0$, so ist $g \in U$

Beweis. " $\Rightarrow$ " $\exists V \in \mathscr{O}$ mit $f \in V \subseteq U \Rightarrow \exists B \in \mathscr{B}$(Basis der Produkttopologie): $f \in B \subseteq V \subseteq U$
$B = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n$, $V_n \in \mathscr{O}_n$, $V_n \neq \{0,1\}$ nur für $n \in E \subseteq \mathbb{N}$, E endlich.
Definiere $n_0 := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \in E\}$. Dies ist das gesuchte n_0, denn $V_n = \{0,1\}\ \forall n > n_0$, d.h. falls $g_n = f_n\ \forall n \leq n_0 \Rightarrow g \in B \subseteq U$

" $\Leftarrow$ " Definiere $B := \{f_0\} \times \{f_1\} \times ... \times \{f_{n_0}\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ....$
Dies ist eine Basismenge, also insbesondere offen in der Produkttopologie und es ist $f \in B \subseteq U$, denn wenn $g \in B \Rightarrow f_n = g_n\ \forall n \leq n_0 \Rightarrow g \in U$
Damit ist U eine Umgebung. □

3 Stetigkeit und Folgen

3.1 Stetigkeit

Definition 3.1. *Seien $(X, \mathscr{O})$ und $(Y, \widetilde{\mathscr{O}})$ topologische Räume, $f : X \to Y$.*

(i.) *f heißt **stetig** (bzgl $\mathscr{O}$ und $\widetilde{\mathscr{O}}$)*
$:\Leftrightarrow\ \forall V \in \widetilde{\mathscr{O}} :\ f^{-1}(V) \in \mathscr{O}$

(ii.) *f heißt **stetig an der Stelle** $x_0 \in X$*
$:\Leftrightarrow \forall$ *Umgebungen U von $f(x_0)$ gilt: $f^{-1}(U)$ ist Umgebung von x_0.*

Bemerkung: $f : X \to Y$ stetig $\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in X$ ist f stetig in x.

Definition 3.2. *$f : X \to Y$ heißt offen, falls für alle $U \in \mathscr{O}_X : f(U) \in \mathscr{O}_Y$*

Beispiel 3.3. *(X, d), (X', d') metrische Räume. Dann gilt:*
$f : X \to X'$ ist in $x_0 \in X$ stetig $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 :\ x \in X,\ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

Beweis. " $\Leftarrow$ " Sei U eine Umgebung von $f(x_0) \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B^{d'}(f(x_0), \epsilon) \subseteq U$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ mit
$B^d(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B^{d'}(f(x_0), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(U)$
Damit ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x_0.

" $\Rightarrow$ " Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann ist $f^{-1}(B^{d'}(f(x_0, \epsilon))$ eine Umgebung von x_0 und es existiert ein $\delta > 0$ mit $B^d(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B^{d'}(f(x_0, \epsilon))$. $\square$

Im folgenden Satz sollen einige wichtige Eigenschaften über Stetigkeit zusammengefasst werden.

Satz 3.4. *(i.)* *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Dann ist $id_X : X \to X$ stetig.*

(ii.) *Seien $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ und es sei f stetig in $x_0 \in X$ und g stetig in $f(x_0) \in Y$, dann ist $g \circ f$ stetig in $x_0 \in X$*
Insbesondere folgt, dass wenn f, g stetig sind, dass dann $g \circ f$ stetig ist.

(iii.) *Sei $(X, \mathscr{O})$ topologischer Raum, $A \subseteq X$ und $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung.*
Dann ist i stetig (bzgl. $\mathscr{O}_A$ und $\mathscr{O}$)
Insbesondere gilt: Ist $f : X \to Y$ stetig $\Rightarrow f_{|A} : A \to Y$ ist stetig (bzgl. $\mathscr{O}_A$ und $\mathscr{O}$), da $f_{|A} = f \circ i$ ist.

(iv.) *$f : X \to Y$, f stetig $\Leftrightarrow \forall$ abgeschlossenen $C \subseteq Y$ gilt: $f^{-1}(C)$ ist abgeschlossen in X*

(v.) *$f : X \to \prod_{i \in I} X_i$ stetig $\Leftrightarrow$ Für alle $i \in I$ ist $f_i := p_i \circ f : X \to X_i$ stetig, wobei*
$p_i : \prod_{j \in I} X_j \to X_i$ definiert ist durch $p_i((x_j)_{j \in I}) := x_i$.
p_i ist dann stetig und offen.

(vi.) *Sei $X \cap Y = \emptyset$, $f : X \cup Y \to Z$. Dann gilt:*
f ist stetig (bzgl. der Summentopologie auf $X \cup Y$) $\Leftrightarrow f_{|X}$ und $f_{|Y}$ sind stetig

(vii.) *$f : X \to Y$, $\mathscr{B}$ Basis der Topologie von Y. Dann gilt:*
f ist stetig $\Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{B}$: $f^{-1}(B) \in \mathscr{O}_X$

(viii.) *Die Aussage in (vii.) gilt auch wenn man die Basis durch eine Subbasis ersetzt.*

Beweis. es wird exemplarisch (iv.) und (v.) gezeigt.
zu (iv.): " $\Rightarrow$ " : Sei $C \subseteq Y$ abgeschlossen $\Rightarrow Y \setminus C$ ist offen in $Y \Rightarrow X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C) \in \mathscr{O}_X$
$\Rightarrow f^{-1}(C)$ ist abgeschlossen in X.
" $\Leftarrow$ " : Sei $O \subseteq Y$ offen $\Rightarrow Y \setminus O$ abgeschlossen $\Rightarrow X \setminus f^{-1}(O) = f^{-1}(Y \setminus O)$ ist abgeschlossen in $X \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathscr{O}_X$

zu (v.): Die Stetigkeit und Offenheit von p_i zeigt man leicht auf der Basis der Produkttopologie.
" $\Leftarrow$: " Sei $V := \prod\limits_{i \in I} V_i$ mit $V_i \in \mathscr{O}_{X_i}$ $\forall i \in I$, $V_j = X_j$ $\forall j \in I \setminus E$ und E endlich, also eine Basismenge.
Nach (vi.) reicht es zu zeigen, dass $f^{-1}(V)$ offen ist. Es gilt:
$x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow \ \forall i \in I: \ f_i(x) \in V_i \Leftrightarrow \forall i \in I: \ x \in f_i^{-1}(V_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{i \in I} f_i^{-1}(V_i) = \bigcap\limits_{i \in E} f_i^{-1}(V_i)$
$\Rightarrow f^{-1}(V) = \bigcap\limits_{i \in E} \underbrace{f_i^{-1}(V_i)}_{\text{offen in } X}$, also ist $f^{-1}(V)$ als endlicher Schnitt offener Mengen auch offen.
" $\Rightarrow$ " : $f_i = f \circ p_i$ und p_i ist stetig, dann folgt es nach (ii.) □

Lemma 3.5. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum mit $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, A_i abgeschlossen und $f : X \to Y$. Dann gilt*
f ist stetig $\Leftrightarrow f_{|A_i}$ stetig $\forall i \in \{1, ..., n\}$

Beweis. " $\Rightarrow$ ": Sei $U \subseteq Y$ offen $f_{|A_i}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A_i \in \mathscr{O}_{A_i}$, da $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}$ ist.
" $\Leftarrow$ " : Sei $C \subseteq Y$ abgeschlossen.
$f^{-1}(C) = X \cap f^{-1}(C) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \cap f^{-1}(C) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_{|A_i}^{-1}(C)$.
Es ist $f_{|A_i}^{-1}(C)$ abgeschlossen in A_i, da $f_{|A_i}$ stetig ist, da aber A_i selbst abgeschlossen ist, folgt damit, dass $f_{|A_i}^{-1}(C)$ abgeschlossen in X ist. Dies gilt für alle i und da eine endliche Vereinigung abgschlossener Mengen auch abgeschlossen ist folgt die Abgeschlossenheit von $f^{-1}(C)$ und damit die Behauptung. □

Definition 3.6. *Seien $(X, \mathscr{O}_X)$ und $(Y, \mathscr{O}_Y)$ topologische Räume.*
$f : X \to Y$ heißt ***Homöomorphismus*** *$\Leftrightarrow f$ bijektiv, f und f^{-1} stetig.*

Wir schreiben dann $X \cong Y$

Folgerung 3.7. *(i.) f^{-1} ist stetig $\Leftrightarrow f$ ist offen.*

(ii.) $f : X \to Y$, $\mathscr{B}$ Basis der Topologie von X. Dann gilt:
f ist offen $\Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{B}$: $f(B) \in \mathscr{O}_Y$

(iii.) Falls f injektiv ist gilt (ii.) genauso wenn man eine Subbasis hat.

Beweis. Leichte Übung □

Beispiel 3.8. *(i.) $\overline{B} := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und*
$Q := [-1, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ sind homöomorph via $f : \overline{B} \to Q$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Hierbei ist $\|x\|_2$ die euklidische und $\|x\|_\infty$ die Maximumsnorm auf dem $\mathbb{R}^2$
Das heißt also, dass kantig und rund homöomorph sein können.

(ii.) $B := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ via $f : B \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) :=$ $\tan(\frac{\pi}{2} \cdot \|x\|_2) \cdot x$
Das heißt, dass große und kleine Räume homöomorph sein können.

(iii.) *Im allgemeinen kann man zeigen:*
$K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *abgeschlossen, beschränkt, konvex und* $\mathring{K}_1 \neq \emptyset,\ \mathring{K}_2 \neq \emptyset \Rightarrow K_1$ *und* K_2 *sind homöomorph.*

Definition 3.9. *Sei* $(X, \mathscr{O})$ *eine topologischer Raum,* $x \in X$. *Eine Teilmenge* $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *heißt* ***Umgebungsbasis von*** x *, falls*

(i.) $U \in \mathscr{U} \Rightarrow U$ *Umgebung von* x

(ii.) V *Umgebung von* $x \Rightarrow \exists\, U \in \mathscr{U} :\ x \in U \subseteq V$

Beispiel 3.10. *In metrischen Räumen stellt* $\mathscr{U} := \left\{B(x, \frac{1}{n}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ *eine Umgebungsbasis von* x *dar.*

Definition 3.11.
- *Ein topologischer Raum erfüllt das* ***1.Abzählbarkeitsaxiom*** $:\Leftrightarrow$ *zu jedem* $x \in X$ *existiert eine abzählbare Umgebungsbasis von* x.
- *Ein topologischer Raum erfüllt das* ***2.Abzählbarkeitsaxiom*** $\Leftrightarrow X$ *besitzt eine abzählbare Basis seiner Topologie.*

Bemerkung: Das 2. impliziert das 1.Abzählbarkeitsaxiom.

Beispiel 3.12. *(i.)* *Jeder metrische Raum erfüllt das 1.Abzählbarkeitsaxiom mit* $\mathscr{U} := \left\{B(x, \frac{1}{n}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$.

(ii.) *Der* $\mathbb{R}^n$ *mit der üblichen Topologie erfüllt das 2.Abzählbarkeitsaxiom, da wegen* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *das Mengensystem* $\mathscr{B} := \left\{B(x, r) \;\middle|\; r \in \mathbb{Q}_{>0},\ x \in \mathbb{Q}^n\right\}$ *eine Basis der Topologie ist.*

(iii.) X *überabzählbar und* $\mathscr{O}_X = \mathscr{P}(X)$ *erfüllt nicht das 2.Abzählbarkeitsaxiom.*

(iv.) *Erfüllt* $(X, \mathscr{O})$ *das 1. bzw. 2.Abzählbarkeitsaxiom und ist* $A \subseteq X$ *so erfüllt auch* $(A, \mathscr{O}_A)$ *das 1. bzw. 2.Abzählbarkeitsaxiom.*

Lemma 3.13. *Sei* $X := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *stetig und beschränkt*$\}$ *mit Metrik* $d(f, g) := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$. *Dann ist* X *ein metrischer Raum, der keine abzählbare Basis seiner Topologie besitzt*

Beweis. Definiere
$F := \{f \in X \mid \forall n \in \mathbb{Z} : f(n) \in \{0, 1\}$ und $f_{|[n,n+1]}$ linear fortgesetzt$\}$
Seien $f, g \in F$ und $f \neq g \Rightarrow d(f, g) = 1 \Rightarrow B(f, \frac{1}{2}) \cap B(g, \frac{1}{2}) = \emptyset$
Außerdem ist F überabzählbar (Analysis)
Angenommen $\mathscr{B}$ sei eine abzählbare Basis
$\Rightarrow \forall f \in F\ \exists\, B_f \in \mathscr{B}$ mit $f \in B_f \subseteq B(f, \frac{1}{2})$. Für $f \neq g$ gilt dann also $B_f \cap B_g = \emptyset$. Die Abbildung $f \to B_f$ ist also eine injektive Abbildung von F nach $\mathscr{B}$.
Dann folgt aber, dass $\mathscr{B}$ überabzählbar ist, also ein Widerspruch. □

Bemerkung: $(X, \mathscr{O})$ erfüllt das 1.Abzählbarkeitsaxiom $\Leftrightarrow$ Zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebungsbasis $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq ....$
Dies ist klar, man betrachtet einfach die Schnitte $U_0 \cap U_1 \cap ... \cap U_n$ von den U_i aus Definition 3.11
Im folgenden werden in der Regel direkt diese Umgebungen benutzt.

3.2 Folgen und Konvergenz

Wir wollen nun das Konzept der Folgenkonvergenz in allgemeinen topologischen Räumen einführen und mit dem Stetigkeitsbegriff in Verbindung bringen.

Definition 3.14. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.*

(i.) *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ heißt* ***konvergent gegen*** *$x \in X$ $:\Leftrightarrow$ für jede Umgebung U von x existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0 : x_n \in U$*

(ii.) *Ist X ein metrischer Raum, so heißt x_n eine* ***Cauchyfolge*** *$:\Leftrightarrow$ für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m > n_0 : d(x_n, x_m) < \epsilon$*

(iii.) *Ein metrischer Raum in dem zu jeder Cauchyfolge ein $x \in X$ existiert, mit: x_n konvergiert gegen x, heißt* ***vollständig*** *.*

Es sei darauf hingewiesen, dass die Konvergenz im Allgemeinen alles andere als eindeutig ist, z.B. konvergiert in $(X, \{X, \emptyset\})$ jede Folge gegen jeden Punkt.
Schreibweise: $(x_n) \to x$ oder $x_n \to x$

Beispiel 3.15. *(i.)* *Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann gilt $(x_n) \to x \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow\ d(x_n, x) < \epsilon$*

(ii.) *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $(x_n) \subseteq A$ eine Folge in A mit $x_n \to x \Rightarrow x \in A$*

Satz 3.16. *Seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$, $A \subseteq X$. Dann gilt:*

(i.) *f ist stetig an der Stelle $x \in X \Rightarrow$ Für jede Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x)$*

(ii.) *$\{x \in X \mid \exists$ Folge $(x_n) \subseteq A$ mit $x_n \to x\} \subseteq \overline{A}$*

(iii.) *Erfüllt X das 1.Abzählbarkeitsaxiom, so gilt in (i.) die Umkehrung und in (ii.) die Gleichheit.*

Beweis. zu (i.): Es gelte $(x_n) \to x$ und es sei U eine Umgebung von $f(x_0) \Rightarrow\ f^{-1}(U)$ ist eine Umgebung von x_0
$\Rightarrow \exists\ n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0 :\ x_n \in f^{-1}(U) \Rightarrow \exists\ n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0 :\ f(x_n) \in U$

zu(ii.): Sei (x_n) eine Folge in A und $(x_n) \to x$
Annahme: $x \in X \setminus \overline{A}$
$X \setminus \overline{A}$ ist offen $\Rightarrow \exists\ n_0$, so dass $\forall n \geq n_0 :\ x_n \in X \setminus \overline{A}$
Dies ist ein Widerspruch zu $(x_n) \subseteq A$.

zu (iii.): Wir zeigen zunächst die umgekehrte Implikation in (i.):
Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis mit $U_0 \supseteq U_1 \supseteq$ .... wie in der Bemerkung beim 1.Abzählbarkeitsaxiom.
Sei $V \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$, wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist. Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_n \cap (X \setminus f^{-1}(V)$. Dann gilt aber nach Definition der $U_n :\ x_n \to x$ und damit nach Voraussetzung $f(x_n) \to f(x)$, was aber ein Widerspruch zu $x_n \notin f^{-1}(V)$ ist.
Nun zeigen wir die Gleichheit in (ii.):
Sei also $x \in \overline{A}$ und (U_n) eine Umgebungsbasis von x wie oben.
Nach Lemma 1.22 gilt $\forall n \in \mathbb{N} :\ U_n \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$ es gibt eine Folge $(x_n) \subseteq A$ mit $x_n \in U_n\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow\ (x_n) \to x$ ☐

Bemerkung: Insbesondere gilt, dass in Räumen X mit 1.Abzählbarkeitsaxiom gilt:

$$A \subseteq X \text{ abgeschlossen } \Leftrightarrow\ \forall\ (x_n) \subseteq A,\ \text{mit } x_n \to x\ \Rightarrow\ x \in A$$

Beispiel 3.17. *(i.)* $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *Folge in* $\prod_{i\in I} X_i$*. Dann gilt:*

$$(x^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ in } \prod_{i\in I} X_i \Leftrightarrow \forall i \in I: \; x_i^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_i \text{ in } X_i$$

(ii.) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *mit der Produkttopologoie erfüllt nicht das 1.Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. zu (i.): "$\Rightarrow$" $p_i(x^{(n)}) = x_i^{(n)}$, $p_i(x) = x_i$ damit folgt diese Richtung aus Satz 3.16 und der Stetigkeit der p_i
"$\Leftarrow$ " Sei U eine Umgebung von $x \Rightarrow \exists\, B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq U$, $B = \prod_{i\in I} V_i$ mit $V_i \neq X_i$ nur für endlich viele $i = i_1, ..., i_m$
Es existieren $n_1, ..., n_m$, so dass $\forall n \geq n_j : \; x_{i_j}^{(n)} \in V_{i_j}$ $j = 1, ..., m$
$\Rightarrow \forall n \geq \max\{n_1, ..., n_m\} =: n_0$ gilt $x_{i_j}^{(n)} \in V_{i_j}$, $j = 1, ..., m$
$\Rightarrow \; x^{(n)} \in B \subseteq U \; \forall n \geq n_0 \Rightarrow \; x^{(n)} \to x$

zu (ii.): Angenommen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine abzählbare Umgebungsbasis von $f_0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\; \exists\, E_n \subseteq \mathbb{R}$ endlich und für jedes $x \in E_n$ eine offene Menge $V_x^n \subseteq \mathbb{R}$ mit $f_0(x) \in V_x^n$, so dass gilt:
Ist $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $f(x) \in V_x^n$ für alle $x \in E_n$, so folgt $f \in U_n$
Dies gilt nach Definition der Basis in der Produkttopologie.
Dann gilt: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq \mathbb{R}$ ist abzählbar und damit existiert ein $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.
Definiere $U := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid |f(x_0) - f_0(x_0)| < 1\}$. Dies ist offensichtlich eine Umgebung von f_0.
Da U_n eine Umgebungsbasis darstellt existiert ein $n_0 \in \mathbb{N} : U_{n_0} \in U$
Wähle nun $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit $g(x) \in V_x^{n_0}$ für alle $x \in E_{n_0}$ und $g(x_0) = f(x_0) + 1$
$\Rightarrow \; g \in U_{n_0}$, aber $g \notin U$ und damit einen Widerspruch. $\square$

3.3 Häufungspunkte und Grenzwerte von Funktionen

Es sollen noch kurz einige weiterführende Begriffe Erwähnung finden, die sich gerade in der Analysis häufig wiederfinden.

Definition 3.18. *Sei* $(X, \mathscr{O})$ *ein topologischer Raum* $A \subseteq X$*.*

(i.) $x \in X$ *heißt* ***Häufungspunkt (HP) von*** $A :\Leftrightarrow \forall$ *Umgebungen* U *von* x*:* $U \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$

(ii.) x *heißt* ***isolierter Punkt von*** $A :\Leftrightarrow x$ *ist kein Häufungspunkt von* A

Lemma 3.19. *Sei* X *ein topologischer Raum und* $\widetilde{A}$ *die Menge der HP von* $A \subseteq X$*, dann gilt* $\widetilde{A} \subseteq \overline{A}$

Erfüllt X *zusätzlich das 1.Abzählbarkeitsaxiom, so sind äquivalent:*

(i.) $x \in \widetilde{A}$

(ii.) $\exists$ *Folge* $(x_n) \subseteq A$ *mit* $x_n \neq x\; \forall n \in \mathbb{N}$ *und* $x_n \to x$

(iii.) $\exists$ *Folge* $(x_n) \subseteq A$ *mit paarweise verschiedenen Folgegliedern,* $x_n \neq x\; \forall n \in \mathbb{N}$ *und* $x_n \to x$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus Lemma 1.22
Wir zeigen nur (i.) $\Leftrightarrow$ (ii.):
(i.)$\Rightarrow$ (ii.): Sei $x \in \widetilde{A}$
Wähle eine abzählbare Umgebungsbasis $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq ...$ von x. Dann gilt $U_n \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset\; \forall n \in \mathbb{N}$. Damit folgt schon (ii.)
(ii.)$\Rightarrow$ (i.): Sei U eine Umgebung von $x \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \; x_n \in U \setminus \{x\}$, $\forall n \geq n_0$ mit $(x_n) \subseteq A$
$\Rightarrow \; x_n \in U \setminus \{x\} \cap A \; \forall n \geq n_0$.
Damit folgt (i.) $\square$

Definition 3.20. *$(X, \mathscr{O}_X)$ und $(Y, \mathscr{O}_Y)$ seien topologische Räume. $f : A \subseteq X \to Y$ eine Abbildung und a ein HP von A.*
Sei $b \in Y$ und $\forall$ Umgebungen V von b existiere eine Umgebung U von a, so dass $f(U \cap A \setminus \{a\}) \subseteq V$ ist.
Dann heißt b der Grenzwert von $f(x)$ fur $x \to a$ und man sagt f konvergiert gegen b für $x \to a$.

Man kann die Stetigkeit auch auf diese Weise charakterisieren:

Lemma 3.21. *Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$, x_0 ein HP von A und $f : A \cup \{x_0\} \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:*
f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$.

Beweis. Übung □

Bemerkung: Es sei darauf hingewiesen, dass wenn $x_0 \in A$ kein HP von A ist, f in x_0 trivialerweise stetig ist, denn dann existiert eine Umgebung U von x_0 in X mit $A \cap U = \{x_0\}$, also ist für jede Umgebung V von $f(x_0)$: $A \cap U \subseteq f^{-1}(V)$ und damit ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0.

Lemma 3.22. *X sei ein topologischer Raum mit 1.Abzählbarkeitsaxiom, dann gilt:*

$$f(x) \to b \text{ für } x \to a \Leftrightarrow \text{ für alle Folgen } (x_n) \subseteq A \setminus \{a\} \text{ mit } x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b$$

Beweis. Übung □

4 Zusammenhang

Definition 4.1. *Ein topologischer Raum* $(X, \mathscr{O})$ *heißt* ***zusammenhängend*** $:\Leftrightarrow$ *Sind* $U, V \in \mathscr{O} \setminus \{\emptyset\}$ *und gilt* $X = U \cup V$*, so folgt* $U \cap V \neq \emptyset$
(d.h. X lässt sich nicht durch nichtleere disjunkte Mengen trennen)

$A \subseteq X$ *heißt zusammenhängend* $:\Leftrightarrow$ $(A, \mathscr{O}_A)$ *ist zusammenhängend* $\Leftrightarrow$ *(*$U, V \in \mathscr{O} \setminus \{\emptyset\}$ *mit* $A \subseteq U \cup V$ *und* $A \cap V \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset \Rightarrow A \cap U \cap V \neq \emptyset$*)*

Beispiel 4.2. *Seien* $(X, \mathscr{O}_X)$ *und* $(Y, \mathscr{O}_Y)$ *topologische Räume mit* $X \cap Y = \emptyset$*, dann gilt natürlich, dass* $X \cup Y$ *mit der Summentopologie nicht zusammenhängend ist.*

Bemerkung: Es sei angemerkt, dass zusammenhängend äquivalent ist zu: X und $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von X die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Definition 4.3. *Sei X ein topologischer Raum.*

(i.) *Sei* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *und* $x, y \in X$*. Eine stetige Abbildung* $\gamma : [a, b] \to X$ *mit* $\gamma(a) = x$ *und* $\gamma(b) = y$ *heißt* ***Weg in*** X ***von*** x ***nach*** y*.*

(ii.) X *heißt* ***wegzusammenhängend*** $:\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X$ *existiert ein Weg in* X *von* x *nach* y*.*

(iii.) $A \subseteq X$ *heißt* ***wegzusammenhängend*** $:\Leftrightarrow$ $(A, \mathscr{O}_A)$ *ist wegzusammenhängend.*

Bemerkung: (iii.) kann auch so formuliert werden: Es existiert für alle $x, y \in A$ eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ deren Bild ganz in A liegt.

Als Anwendung beweisen wir folgendes wichtiges Lemma aus der Analysis.

Lemma 4.4. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *nicht leer, offen und zusammenhängend. (Solche Mengen bezeichnet man auch als Gebiete, sie sind automatisch auch wegzusammenhängend, wie wir später sehen werden)*
Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar und* $Df(x) = 0$ *für alle* $x \in \Omega$*.*
Dann gilt: $f = const$

Beweis. Sei $U \subseteq \Omega$ konvex, $x, y \in U$ und $g(t) := f((1-t)x + ty)$.
Dann gilt $g'(t) = Df((1-t)x + ty) \cdot (y - x) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$ und damit existieren nach dem Mittelwertsatz $\xi_j \in (0, 1)$ mit $g_j(1) - g_j(0) = g_j'(\xi_j) = 0$ (g_j bezeichnen die Koordinaten von g)
$\Rightarrow f(x) = f(y)$.
Also ist f auf konvexen Teilmengen von Ω konstant.

Sei nun $x \in \Omega$, dann existiert eine offene Kreisscheibe (konvex) die noch ganz in Ω liegt und auf dieser in Ω offenen Umgebung U_x ist f nach obigem konstant, d.h. $\forall x \in \Omega\ \exists\ U_x \subseteq \Omega$ offene Umgebung von x mit $f_{|U_x} \equiv f(x)$.

Sei nun $x_0 \in \Omega$ fest gewählt und $\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid f(x) = f(x_0)\}$, $\Omega_1 := \Omega \setminus \Omega_0$.
Es ist Ω_0 offen in Ω, denn sei $x \in \Omega_0 \Rightarrow \exists\ U_x$ Umgebung von x mit $f_{|U_x} \equiv f(x) = f(x_0)$, also $U_x \subseteq \Omega_0 \Rightarrow \Omega_0$ offen
Aber auch Ω_1 ist offen, denn sei $x \in \Omega_1$, dann existiert eine Umgebung U_x von x mit $f_{|U_x} \equiv f(x) \neq f(x_0)$.
Da Ω zusammenhängend ist und $x_0 \in \Omega_0 \neq \emptyset$ ist, folgt $\Omega = \Omega_0$ und damit die Behauptung. $\square$

Die folgende Anwendung ist ein Vorgriff auf die Methoden der algebraischen Topologie

Beispiel 4.5. *Sei X zusammenhängend und Y nicht, dann können X und Y nicht homöomorph sein (siehe Satz 4.8).*
Insbesondere sind $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{R}^n$ *mit* $n \geq 2$ *nicht homöomorph, denn:*
Angenommen f ist ein Homöomorphismus, dann sind auch $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und*
$\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ *homöomorph, aber* $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ *also nicht zusammenhängend, während* $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ *sehr wohl zusammenhängend ist (sogar wegzusammenhängend)*

Wir wollen nun die zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ charakterisieren.

Lemma 4.6. *$A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend $\Leftrightarrow$ A ist ein Intervall.*
(wobei $A \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $\Leftrightarrow$ Sind $a, b \in A$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$, so gilt $c \in A$)

Beweis. " $\Rightarrow$ " Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend und $a, b \in A$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$.
Annahme: $c \notin A \Rightarrow A = ((-\infty, c) \cap A) \cup ((c, \infty) \cap A)$ wobei beide Mengen nicht leer und offen in A sind, da $a < c < b$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, also ist $c \in A$

" $\Leftarrow$ " Sei I ein Intervall, $I = U \cup V$ mit U, V offen in I und beide nicht leer. Z.z. $: U \cap V \neq \emptyset$
Annahme: $U \cap V = \emptyset$
Sei $a \in U,\ b \in V$ und o.E. $a < b$
Definiere $c := \inf\{y \in V \mid a < y\} \Rightarrow\ c \in I$, denn $a \leq c \leq b$. Außerdem gilt $c \in \overline{V}^I$, wobei damit der Abschluß in I gemeint ist.
Dies gilt, da eine Folge $(c_n) \subseteq V$ existiert, mit $c_n \to c$ (Nach der Definition des Infimums in der Analysis und Satz 3.16)
Es ist $\overline{V}^I = V$, da V abgeschlossen in I, da $V = I \setminus U$ und U offen in I.
<u>1.Fall:</u> $c = a \Rightarrow\ a \in U \cap V$, was aber nach Annahme nicht sein kann.
<u>2.Fall:</u> $c > a \Rightarrow (a, c) \subseteq I$ (da I ein Intervall ist) und es ist $(a, c) \cap U = \emptyset$ (nach Def. von c) $\Rightarrow\ (a, c) \subseteq U \overset{*}{\Rightarrow}\ c \in U \Rightarrow\ c \in U \cap V$ was eine Widerspruch zur Voraussetzung ist.
Es ist noch die Folgerung * zu klären:
Wenn $(a, c) \subseteq U \Rightarrow c - \frac{1}{n} \in U\ \forall n > n_0 \Rightarrow c \in \overline{U}^I$, aber $\overline{U}^I = U$ wie vorher. □

Lemma 4.7. *Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend und $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, so ist auch B zusammenhängend.*

Beweis. Sei $B \subseteq U \cap V$ mit U, V offen in X und $B \cap U \neq \emptyset$, $B \cap V \neq \emptyset$. Z.z.$:\ B \cap U \cap V \neq \emptyset$
Nach (1.22) gilt $A \cap U \neq \emptyset,\ \ A \cap V \neq \emptyset$ und es ist $A \subseteq U \cup V \Rightarrow A \cap U \cap V \neq \emptyset$ und damit natürlich auch $B \cap U \cap V \neq \emptyset$ □

Satz 4.8. *Ist $f : X \to Y$ stetig und X (weg-)zusammenhängend, so ist $f(X) \subseteq Y$ (weg-)zusammenhängend*

Beweis. Für zusammenhängend:

Seien $U, V \subseteq Y$ offen $f(X) \subseteq U \cup V$ und $f(X) \cap U \neq \emptyset$, $f(X) \cap V \neq \emptyset$. Z.z. $: F(X) \cap U \cap V \neq \emptyset$
Sei $U' := f^{-1}(U),\ V' := f^{-1}(V)$ offen in X. Dann ist $X = U' \cup V'$ und $U' \neq \emptyset,\ V' \neq \emptyset$
Da X zusammenhängend ist folgt $U' \cap V' \neq \emptyset$ und damit existiert ein $x \in X : f(x) \in U \cap V$. Damit folgt die Behauptung.

Für wegzusammenhängend ist der Beweis klar: Man wählt zu zwei Punkten $f(x)$ und $f(y)$ einen Weg γ in X der x und y verbindet. Der Weg $f \circ \gamma$ tut es dann. □

Lemma 4.9. *X wegzusammenhängend $\Rightarrow$ X zusammenhängend*

Beweis. $X = U \cup V$, U, V offen, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$. Z.z.$:\ U \cap V \neq \emptyset$
Es existieren $x \in U$, $y \in V$ und ein Weg $\gamma : [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y$.
Definiere $U' := \gamma^{-1}(U) \subseteq [a, b]$ offen, $U' \neq \emptyset$ und $V' := \gamma^{-1}(V) \subseteq [a, b]$, $V' \neq \emptyset$. Es gilt $[a, b] \subseteq U' \cup V'$ da $X = U \cup V$.
Da $[a, b]$ ein Intervall ist, ist es zusammenhängend, also gilt $\exists\ t \in U' \cap V' \Rightarrow \gamma(t) \in U \cap V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$ □

Beispiel 4.10. *Ein zusammenhängender Raum X der nicht wegzusammenhängend ist.*
$A := \{(x, sin\frac{1}{x}) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist wegzusammenhängend, da A der Graph einer stetigen Funktion ist, also auch zusammenhängend. Nach Lemma 4.7 ist dann aber auch $X := \overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ zusammenhängend.
X ist aber nicht wegzusammenhängend, da es keine stetige Abbildung in A gibt, die einen Punkt auf A mit einem auf $(\{0\} \times [-1, 1])$ verbindet.

Wir wollen nun sagen, was es heißt zwei Wege hintereinander zu durchlaufen, dazu sei aber zuerst folgendes bemerkt:

Bemerkung: Es existieren $a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$ und eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y \Leftrightarrow$ Es gibt eine stetige Abbildung $\gamma' : [0, 1] \to X$ mit $\gamma'(0) = x,\ \gamma'(1) = y$
Dies sieht man mitttels $\phi : [0, 1] \to [a, b],\ \phi(t) := bt + (1 - t)a$ und $\gamma' := \gamma \circ \phi$
In diesem Sinne reicht es also, wenn wir ab jetzt nur durch $[0, 1]$ parametrisierte Wege betrachten.

Definition 4.11. *(i.) Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to X$ Wege mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$, so heißt der Weg $\gamma_0 * \gamma_1 : [0, 1] \to X$ mit*

$$\gamma_0 * \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \gamma_1(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

die Verkettung von γ_0 und γ_1
$\gamma_0 * \gamma_1$ ist in $t = \frac{1}{2}$ wohldefiniert und damit folgt aus Lemma 3.5 die Stetigkeit von $\gamma_0 * \gamma_1$, also ist die Verkettung selbst wieder ein Weg von $\gamma_0(0)$ nach $\gamma_1(1)$.

(ii.) Zu einem Weg $\gamma : [0, 1] \to X$, sei $\overline{\gamma} : [0, 1] \to X$ mit $\overline{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$ der umgekehrt durchlaufene Weg.
$\overline{\gamma}$ ist natürlich auch wieder stetig.

Satz 4.12. *Seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$ (weg-)zusammenhängend und sei $A \cap B \neq \emptyset$*
$\Rightarrow A \cup B$ ist (weg-)zusammenhängend.

Beweis. im Fall wegzusammenhängend, der andere Fall sei eine Übung.
Seien $x, y \in A \cup B$ und o.E. $x \in A,\ y \in B$.
Wähle ein $z \in A \cap B$. Nach Voraussetzung gibt es Wege $\gamma_0 : [0, 1] \to A$ und $\gamma_1 : [0, 1] \to B$ stetig, mit $\gamma_0(0) = x,\ \gamma_0(1) = z = \gamma_1(0),\ \gamma_1(1) = y$.
Es ist dann $\gamma := \gamma_0 * \gamma_1 : [0, 1] \to X$ stetig und $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$. Außerdem liegt γ ganz in $A \cup B$ und ist demnach sogar als Abbildung $\gamma : [0, 1] \to A \cup B$ stetig. $\square$

Definition 4.13. *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$.*

*(i.) $Z(x) = Z^X(x) := \bigcup \{A \mid x \in A \subseteq X,\ A$ zusammenhängend$\}$ heißt die **Zusammenhangskomponente von** x (in X).*

*(ii.) $Z_w(x) = Z_w^X := \{y \in X \mid$ es existiert ein Weg in X von x nach $y\}$ heißt die **Wegzusammenhangskomponente von** x (in X).*

Lemma 4.14. *Es gilt:*

(i.) $Z(x)$ ist abgeschlossen und zusammenhängend.
$x, y \in X \Rightarrow Z(x) = Z(y)$ oder $Z(x) \cap Z(y) = \emptyset$

(ii.) $Z_w(x) \subseteq Z(x)$ und $Z_w(x)$ ist wegzusammenhängend.
$x, y \in X \Rightarrow Z_w(x) = Z_w(y)$ oder $Z_w(x) \cap Z_w(y) = \emptyset$
Außerdem hat $Z_w(x)$ die Darstellung
$Z_w(x) = \bigcup \{A \mid A$ ist wegzusammenhängend und $x \in A\}$

Beweis. zu (i.): Zeige zunächst, dass $Z(x)$ zusammenhängend ist:
Sei $Z(x) \subseteq U \cup V$ mit U, V offen in X und $Z(x) \cap U \neq \emptyset$, $Z(x) \cap V \neq \emptyset$.
$\mathbb{Z}$: $Z(x) \cap U \cap V \neq \emptyset$
Sei $y \in Z(x) \cap U$ und $z \in Z(x) \cap V$, dann existieren nach Definition A, B zusammenhängend mit $\{x, y\} \subseteq A,\ \{x, z\} \subseteq B$.
$\Rightarrow\ A \cap B \neq \emptyset$ und nach Satz 4.12 ist dann $A \cup B$ zusammenhängend. Dann ist aber $A \cup B \subseteq$

$Z(x) \subseteq U \cup V$, $y \in U \cap A$, $z \in V \cap B \;\Rightarrow\; (A \cup B) \cap U \neq \emptyset$, $(A \cup B) \cap V \neq \emptyset$
$\Rightarrow (A \cup B) \cap U \cap V \neq \emptyset$, da $A \cup B$ zusammenhängend ist $\Rightarrow Z(x) \cap U \cap V \neq \emptyset$ und damit die Behauptung.

Zeige nun, dass $x, y \in X \Rightarrow Z(x) = Z(y)$ oder $Z(x) \cap Z(y) = \emptyset$:
Sei also $Z(x) \cap Z(y) \neq \emptyset \Rightarrow Z(x) \cup Z(y)$ ist zusammenhängend $\Rightarrow\; Z(x) \cup Z(y) \subseteq Z(x) \cap Z(y)$
$\Rightarrow Z(x) = Z(y)$

Nun zeigen wir noch, dass $Z(x)$ abgeschlossen ist:
Es ist $\overline{Z(x)}$ zusammenhängend, da $Z(x)$ zusammenhängend ist, also ist $\overline{Z(x)} \subseteq Z(x) \Rightarrow \overline{Z(x)} = Z(x)$

zu (ii.): Zeige $Z_w(x)$ ist wegzusammenhängend:

Seien $y, z \in Z_w(x)$. Dann existieren stetige Abbildungen $\gamma_0 : [0,1] \to X$ und $\gamma_1 : [0,1] \to X$ mit $\gamma_0(0) = x$, $\gamma_0(1) = y$ und $\gamma_1(0) = x$, $\gamma_1(1) = z$.
Es gilt nun, dass $u \in Z_w(x)$ ist, $\forall u \in X$ für die ein $t \in [0,1]$ existiert mit $\gamma_0(t) = u$
Um dies einzusehen parametrisiert man γ_0 einfach so, dass er nur bis t durchlaufen wird. (für γ_1 genauso).
Damit liegen γ_0, γ_1 sogar in $Z_w(x)$ und sind als Abbildungen nach $Z_w(x)$ dann stetig.
Definiere nun $\gamma := \overline{\gamma_1} * \gamma_0 : [0,1] \to Z_w(x)$, dann ist dies ein Weg in $Z_w(x)$ von y nach z und damit ist $Z_w(x)$ wegzusammenhängend.

Nun zeigen wir: $Z_w(x) = \bigcup \{A \mid A \text{ ist wegzusammenhängend und } x \in A\}$:
Es gilt: $x \in A$ und A wegzusammenhängend $\Rightarrow A \subseteq Z_w(x)$, denn $y \in A$ ist mit x durch einen Weg in A verbunden, dann aber natürlich auch in X und damit ist nach Definition $y \in Z_w(x)$, damit folgt " $\supseteq$ ".
Die andere Inklusion folgt aus dem Wegzusammenhang von $Z_w(x)$

Nun zeigen wir noch: $x, y \in X \Rightarrow Z_w(x) = Z_w(y)$ oder $Z_w(x) \cap Z_w(y) = \emptyset$:
Sei also $Z_w(x) \cap Z_w(y) \neq \emptyset$, dann ist $Z_w(x) \cup Z_w(y)$ wegzusammenhängend und damit gilt nach dem vorherigen:
$Z_w(x) \cup Z_w(y) \subseteq Z_w(x) \cap Z_w(y)$ und damit $Z_w(x) = Z_w(y)$ □

Bemerkung: Beachte: $Z_w(x)$ ist i.a. nicht abgeschlossen!

Beispiel 4.15. $X := (\{0\} \times [0,1]) \cup (\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]))$.
Die Zusammenhangskomponenten von X *sind* $\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ *und* $\{0\} \times [0,1]$
Alle Zusammenhangskomponenten bis auf $\{0\} \times [0,1]$ *sind offen in* X.

Es soll nun noch genauer auf den Zusammenhang zwischen den Begriffen Zusammenhängend und Wegzusammenhängend eingegangen werden, dazu benötigen wir:

Definition 4.16. *Ein topologischer Raum* X *heißt* ***lokal (weg-)zusammenhängend*** $:\Leftrightarrow \forall x \in X$ *existiert eine Umgebungsabasis von* x*, die aus (weg-)zusammenhängenden Mengen besteht.*

Beispiel 4.17. *(i.)* X *normierter Vektorraum,* $U \subseteq X$ *offen* $\Rightarrow U$ *ist lokal wegzusammenhängend (offen* ϵ*- Bälle sind wegzusammenhängend)*

(ii.) X *in (4.15) ist nicht lokal wegzusammenhängend, da* $(0,0)$ *keine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Mengen besitzt.*

Lemma 4.18. X *lokal (weg-)zusammenhängend* $\Rightarrow$
alle (Weg-)Zusammenhangskomponenten sind offen und abgeschlossen.

Beweis. Für Wegzusammenhang:
Sei $y \in Z_w(x) \Rightarrow \exists\, U$ Umgebung von y, die wegzusammenhängend ist $\Rightarrow\; U \subseteq Z_w(x) \Rightarrow Z_w(x)$ offen.
Es ist $Z_w(x) = X \setminus \bigcup\limits_{Z_w(y) \neq Z_w(x)} Z_w(y)$, also abgeschlossen. □

Lemma 4.19. *Besitzt X eine abzählbare Basis $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{O}$ seiner Topologie und ist $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{O}$ eine Menge von paarweise disjunkten offenen Mengen in X, so ist $\mathscr{U}$ abzählbar.*

Beweis. Zu jedem $U \in \mathscr{U} \setminus \{\emptyset\}$, wähle ein $x \in U$ und eine Basismenge $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq U$. Die Abbildung die jedem U dieses B_U zuordnet ist injektiv, da die U disjunkt sind und damit folgt die Abzählbarkeit. □

Beispiel 4.20. *Ist $(X, \mathscr{O})$ lokal (weg-)zusammenhängend und besitzt eine abzählbare Basis $\Rightarrow$ Die Menge der (Weg-)zusammenhangskmponenten ist abzählbar.*

Eine wichtige Anwendung der obigen Lemmata ist der

Satz 4.21. *$U \subseteq \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow$ U ist Vereinigung von abzählbar vielen disjunkten offenen Intervallen.*

Beweis. U ist lokal (weg-)zusammenhängend, da $\mathbb{R}$ ein normierter VR ist. Die (Weg-)zusammenhangskomponenten von U sind abzählbar, da U eine abzählbare Basis seiner Topologie hat.
$U = \bigcup Z^U(x)$ (die Vereinigung geht über die verschiedenen, disjunkten, abzählbar vielen, in U offenen Zusammenhangskomponenten von U)
Die $Z^U(x)$ sind aber auch in $\mathbb{R}$ offen (da U offen) und zusammenhängend (zeigt man leicht $A \subseteq U$ zusammhängend $\Rightarrow$ $A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend) und damit alles offene Intervalle. □

Folgerung 4.22. *Sei X lokal wegzusammenhängend. Dann gilt:*

$$X \text{ zusammenhängend} \;\Leftrightarrow\; X \text{ wegzusammenhängend}$$

Beweis. " $\Leftarrow$ " : wurde schon gezeigt (dies gilt ohne Voraussetzung)
" $\Rightarrow$ " : X ist die disjunkte Vereinigung der offenen Wegzusammenhangskomponenten, diese müssen aber alle zusammenfallen, da sonst X als Vereinigung von 2 nichtleeren disjunkten Mengen schreibbar ist.
$\Rightarrow X = Z_w(x)$ und damit wegzusammenhängend. □

Beispiel 4.23. *X ein normierter VR. $U \subseteq X$ offen und zusammenhängend (also ein Gebiet) $\Rightarrow$ U wegzusammenhängend.*

Wir wollen nun sehen, wie sich Zusammenhang bei der Produkttopologie verhält.

Satz 4.24. *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Dann gilt:*

$$X \text{ zusammenhängend} \;\Leftrightarrow\; \forall i \in I: \; X_i \text{ zusammenhängend}$$

Beweis. " $\Rightarrow$: " X zusammenhängend $\overset{4.8}{\Rightarrow}$ $p_i(X) = X_i$ ist zusammenhängend.
" $\Leftarrow$ " : Zeige $\forall x \in X: \; Z(x) = X$
Dazu, definiere zu einem festen $x \in X: \; X_j(x) := \{z \in X \mid z_i = x_i \; \forall i \in I \setminus \{j\}\}$.
Es ist $X_j(x)$ homöomorph zu X_j via p_j.
Da X_j zusammenhängend ist, gilt dies auch für $X_j(x)$ und damit ist $X_j(x) \subseteq Z(x)$, also gilt $Z(y) = Z(x)$ für alle $y \in X_j(x)$, also für alle Elemente, die mit x bis auf eine Stelle übereinstimmen.
Induktiv folgt damit nun: $Z(x) = Z(y)$ für alle $y \in X$ mit $y_i = x_i$ außer für endlich viele $i \in I$.
Sei nun $z \in X$ und U eine Umgebung von $z \Rightarrow U \cap Z(x) \neq \emptyset$
denn: $\exists \; V_i \subseteq X_i$ offen $E \subseteq I$ endlich mit $V_i = X_i \; \forall i \in I \setminus E : z \in \prod_{i \in I} V_i \subseteq U$, nach Definition der Basis der Produkttopologie.
Definiere $y \in \prod_{i \in I} X_i$ durch $y_i := \begin{cases} z_i & \text{für } i \in E \\ x_i & \text{für } i \in I \setminus E \end{cases}$
$\Rightarrow Z(y) = Z(x)$ also speziell $y \in Z(x)$, aber es ist auch $y \in \prod_{i \in I} V_i \subseteq U \Rightarrow \; y \in U \cap Z(x)$
$\overset{1.22}{\Rightarrow} X \subseteq \overline{Z(x)} \Rightarrow X = Z(x)$ □

Eine erstaunliche Tatsache über stetige Funktionen liefert der folgende

Satz 4.25. *Es existiert eine surjektive, stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$. Diese nennt man* ***Peanokurve****.*
(γ kann nicht zusätzlich injektiv sein)

Um den Satz zu beweisen benötigen wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 4.26. *Sei Y ein topologischer Raum und $Y_n := Y$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sowie $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ (Raum der Folgen mit Werten in Y)*
Dann ist $X \times X$ homöomorph zu X.

Beweis. Definiere $H : X \to X \times X$ durch $H(y) := (y_1, y_2)$ mit $y_1(n) := y(2n)$, $n \in \mathbb{N}$ und $y_2(n) := y(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$
Diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv und die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit der Koordinatenabbildungen $p_i \circ H$, $i = 1, 2$.
Die Offenheit zeigt man leicht auf Basismengen. □

Beweis. (von Satz 4.25)
Wähle $Y := \{0,1\}$ mit der diskreten Topologie $\mathscr{O}_Y = \mathscr{P}(\{0,1\})$.

1.Schritt: Definiere zunächst $f : X = \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n \to [0,1]$ durch $f((x_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$
Diese Abbildung ist surjektiv und stetig, denn:
Die Surjektivität folgt aus Analysis (Dualdarstellung der Zahlen in $[0,1]$). Es bleibt also nur noch die Stetigkeit zu zeigen.
Sei $x_n = y_n$ $\forall n \leq n_0$, dann folgt
$|f(y) - f(x)| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^{n_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0}}$, also gilt:

$$x_n = y_n \ \forall n \leq n_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2^{n_0}}$$

Damit folgt die Stetigkeit, denn wähle zu vorgegebenem ϵ ein n_0 so, dass $\frac{1}{2^{n_0}} < e$ ist, dann ist $\{x_1\} \times ... \times \{x_{n_0}\} \times Y \times Y \times ... \subseteq f^{-1}(B(x,\epsilon) \cap [0,1])$, also ist $f^{-1}(B(f(x),\epsilon) \cap [0,1])$ eine Umgebung von x.

2.Schritt: Betrachte nun die Abbildung $(f \times f) \circ H : X \to [0,1] \times [0,1]$, wobei H wie im vorherigen Lemma ist, dann ist diese Abbildung stetig und surjektiv.

3.Schritt: Definiere nun $g : X \to [0,1]$ durch $g((x_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$. Diese Abbildung ist stetig und injektiv, denn:
Es gilt (*):

$$|g(x) - g(y)| < \frac{1}{3^{n_0}} \ \Rightarrow \ x_n = y_n \ \forall n < n_0$$

Um dies zu zeigen sei n_1 das minimale $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq y_n$, dann ist
$|g(x) - g(y)| = \left| \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{2(x_n - y_n)}{3^n} \right| \geq \frac{2}{3^{n_1}} - \sum_{n=n_1+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^{n_1}} - \frac{1}{3^{n_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^{n_1}}$
Nach Voraussetzung muss aber dann $n_0 < n_1$ sein und es folgt die Behauptung.
Mit (*) folgt sofort die Injektivität. Die Stetigkeit folgt wie bei f, da gilt:
$x_n = y_n \ \forall n \leq n_0 \ \Rightarrow \ |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{3^{n_0}}$

4.Schritt: $g : X \to g(X)$ ist damit bijektiv und stetig. Diese Abbildung ist sogar offen (Achtung g ist nicht! als Abbildung nach $[0,1]$ offen, da $g(X)$ abgeschlossen ist in $[0,1]$)
Die Offenheit von g folgt aus (*), denn sei $V := \prod_{i\in\mathbb{N}} V_i \subseteq X$ und $V_i = \{0,1\}$ $\forall i > n_0$, dann ist $g(V)$

offen, denn:
Sei $g(x) \in g(V)$, wähle $\epsilon < \frac{1}{3^{n_0}}$, dann ist nach (*) $B(g(x), \epsilon) \cap g(X) \subseteq g(V)$

5.Schritt: $g^{-1} : g(X) \to X$ ist also bijektiv und stetig.
Die Menge $\mathbb{D} := g(X)$ ist das sogenannte Cantorsche Diskontinuum. Man kann zeigen, dass dieses als Schnitt abgeschlossener Mengen schreibbar ist, also selbst abgeschlossen ist und $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{D}$ ist.

6.Schritt: Nun definieren wir $\overline{\gamma} := (f \times f) \circ H \circ g^{-1} : \mathbb{D} \to [0, 1] \times [0, 1]$ stetig und surjektiv.
Man kann nun $\overline{\gamma}$ zu einer stetigen Funktion fortsetzen (siehe folgendes Lemma), daraus folgt dann die Behauptung. □

Lemma 4.27. *Sei $D \subseteq [0, 1]$ abgeschlossen, $\{0, 1\} \subseteq D$, V ein normierter VR und $\overline{f} : D \to V$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $f : [0, 1] \to V$ von $\overline{f}$ (d.h. f ist stetig und $f_{|D} = \overline{f}$) mit $f([0, 1]) \subseteq conv(\overline{f}(D))$ (hierbei ist $conv(A)$ die konvexe Hülle von A)*

Beweis. $[0, 1] \setminus D$ ist offen in $[0, 1]$, da D abgeschlossen in $[0, 1]$. Da aber $\{0, 1\} \subseteq D$ ist $[0, 1] \setminus D$ sogar offen in $\mathbb{R}$, denn nach Definition ist $[0, 1] \setminus D = [0, 1] \cap V$, wobei V offen in $\mathbb{R}$ ist, aber $[0, 1] \setminus D = (0, 1) \cap V$, also offen in $\mathbb{R}$.
Damit ist $[0, 1] \setminus D = \bigcup\limits_{k \in N} (a_k, b_k)$, mit paarweise disjunkten (a_k, b_k) und $N \subseteq \mathbb{N}$.
Definiere $f((1 - t)a_k + tb_k) := (1 - t)\overline{f}(a_k) + t\overline{f}(b_k)$, dann ist f stetig (kann man leicht mit Folgenkonvergenzkriterium zeigen) und das Bild von $[0, 1]$ unter f liegt offensichtlich in $conv(\overline{f}(D))$ □

5 Trennungsaxiome und Konstruktion stetiger Funktionen

5.1 Die Trennungsaxiome

In diesem Abschnitt geht es hauptsächlich darum minimale Anforderungen an die Feinheit der Topologie zu stellen um pathologische Eigenschaften zu vermeiden.
Denn, wie schon erwähnt wurde, gilt beispielsweise für $\mathscr{O}_X = \{X, \emptyset\}$, dass jede Folge gegen jeden Punkt konvergiert und $\overline{\{x\}} = X \; \forall x \in X$ ist. Auch ist jede stetige Funktion $f : (X, \mathscr{O}_X) \to \mathbb{R}$ dann automatisch konstant.
Solche Pathologien will man ausschließen, darum führt man die sogenannten Trennungsaxiome ein.

Definition 5.1. *Ein topologischer Raum X heißt*

(i.) $\boldsymbol{T}_1$*-Raum*	$\Leftrightarrow \forall x \in X : \; \{x\}$ *ist abgeschlossen* ($\Leftrightarrow \; \forall x \in X : \; X \setminus \{x\}$ *ist offen*)
(ii.) $\boldsymbol{T}_2$ *Raum (bzw. Hausdorffraum)*	$\Leftrightarrow$ *Je 2 verschieden Punkte von X besitzen disjunkte Umgebungen*
(iii.) $\boldsymbol{T}_4$ *Raum*	$\Leftrightarrow$ *Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt, dann existieren offene disjunkte Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$*
(iv.) ***normal***	$\Leftrightarrow$ *X ist $\boldsymbol{T}_1$ und $\boldsymbol{T}_4$*

Bemerkung: $\mathrm{T}_2 \Leftrightarrow$ „offene Mengen trennen Punkte“
$\mathrm{T}_4 \Leftrightarrow$ „offene Mengen trennen disjunkte abgeschlossene Mengen“

Lemma 5.2. *X normal $\Rightarrow$ X hausdorffsch $\Rightarrow$ X T_1-Raum*

Beweis. Sei X normal, dann sind $\{x\}, \{y\}$ abgeschlossen und es folgt, dass man diese trennen kann, also ist X hausdorffsch.
Sei X hausdorffsch und $y \in X \setminus \{x\} \overset{T_2}{\Rightarrow} \exists \; U_x, U_y$ Umgebungen von x und y mit $U_x \cap U_y = \emptyset \Rightarrow x \notin U_y \Rightarrow U_y \subseteq X \setminus \{x\} \Rightarrow X \setminus \{x\}$ ist offen, also ist X T_1 □

Die Hausdorff Eigenschaft reicht für eindeutige Grenzwerte aus

Lemma 5.3. *Sei X ein Hausdorff-Raum, dann besitzt jede in X konvergente Folge einen eindeutigen Grenzwert.*

Beweis. Sei $(x_n) \subseteq X$ eine konvergente Folge. Angenommen $x_n \to x$ und $x_n \to y$ mit $x \neq y$
Wähle U, V mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$, $y \in V$
$\Rightarrow \exists \; n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_1 : \; x_n \in U$ und $\forall n \geq n_2 : \; x_n \in V$.
Wähle $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, dann gilt $\forall n \geq n_0 : \; x_n \in U \cap V = \emptyset$,
was natürlich widersprüchlich ist. □

Bemerkung: Man kann also für konvergente Folgen in Hausdorff-Räumen die Bezeichnung $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ verwenden, wenn x_n gegen x konvergiert.

Beispiel 5.4. *Jeder metrische Raum (X, d) ist normal.*

Beweis. Seien $x \neq y$, $d(x,y) := \epsilon > 0 \Rightarrow B(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$, also ist jeder metrische Raum auf jeden Fall hausdorffsch und damit natürlich auch T_1.
noch zu zeigen bleibt, dass X auch T_4 ist.

Seien $A, B \subseteq X$ disjunkt und nicht leer.
Definiere

$$d_A : X \to \mathbb{R},\ d_A(x) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$$

Diese Abbildung ist stetig, denn es gilt $|d_a(x) - d_A(x')| \leq d(x,x')$, also ist sie sogar Lipschitzstetig.
Dies sieht man folgendermaßen:
Es ist $d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y)$ für beliebiges $y \in A$ und damit $d_A(x) \leq d(x,x') + d(x',y)\ \forall y \in A$
$\Rightarrow d_A(x) - d(x,x') \leq d(x',y)\ \forall y \in A \Rightarrow d_A(x) - d(x,x') \leq d_A(x') \Rightarrow d_A(x) - d_A(x') \leq d(x,x')$
Durch vertauschen von x und x' folgt auch $d_A(x') - d_A(x) \leq d(x',x) = d(x,x')$ und damit die Behauptung.
Es gilt

$$d_A(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x \in A$$

" $\Leftarrow$ " : klar
" $\Rightarrow$ " : Wähle $(y_n) \subseteq A$ mit $0 = d_A(x) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x, y_n)$ nach Definition des Infimums.
Dann ist aber nach Definition $y_n \to x$ und nach Satz 3.16 ist dann $x \in A$, wegen der Abgeschlossenheit von A.
Analog wird d_B definiert.
Es ist dann $d_A(x) + d_B(x) > 0\ \forall x \in X$, da $A \cap B = \emptyset$, folglich ist

$$f(x) := \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$$

wohldefiniert und auch stetig (am besten mit Folgenstetigkeit zu sehen), mit $f_{|A} \equiv 0$ und $f_{|B} \equiv 1$.
$U := f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$ und $V := f^{-1}((\frac{1}{2}, \infty))$ sind dann offen und $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$
$\Rightarrow X$ ist T_4. $\square$

Lemma 5.5. *(i.) Jeder Unterraum eines T_1- bzw. T_2-Raums ist wieder T_1- bzw. T_2-Raum*

(ii.) Jeder abgeschlossene Unterraum eines T_4- bzw. normalen Raums ist wieder T_4- bzw. normaler Raum

Beweis. zu (i.): Sei $A \subseteq X$ und X sei T_1. Sei $x \in A$, dann ist $A \setminus \{x\} = A \cap \underbrace{X \setminus \{x\}}_{\text{offen in } X}$ offen in A.

Sei $A \subseteq X$ und X sei T_2. Seien $x, y \in A$, dann gibt es U, V offen in X die x, y trennen, dann sind aber $U' := U \cap A$ und $V' := V \cap A$ offen in A und trennen x, y.

zu (ii.): Sei X T_4 und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Seien $B, C \subseteq A$ abgeschlossen in A und disjunkt.
$\Rightarrow B, C$ sind abgeschlossen in X (da A abgeschlossen) und damit in X durch U, V trennbar. Dann sind aber $U' := U \cap A$ und $V' := V \cap A$ abgeschlossen in A und trennen B, C $\square$

Lemma 5.6. *Sei $\emptyset \neq X := \prod\limits_{i \in I} X_i$. Dann gilt:*

$$X \text{ ist } T_1 \text{ (bzw. } T_2) \ \Leftrightarrow\ \forall i \in I:\ X_i \text{ ist } T_1 \text{ (bzw. } T_2)$$

<u>Bemerkung:</u> *Dies gilt i.a. nicht für normal.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur für T_2:
" $\Leftarrow$ " : Seien $x \neq y \in X \Rightarrow \exists\, j \in I:\ x_j \neq y_j \Rightarrow \exists\, U_j, V_j \subseteq X_j$ offen, disjunkt mit $x_j \in U_j,\ y_j \in V_j$
Definiere $U := \prod\limits_{j \in I} U_i$ mit $U_i = X_i\ \forall i \neq j$ und U_j von oben. (V analog)
Dann sind U, V offen und $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$

" $\Rightarrow$ " : Sei $x \in X$ und $X_j(x) := \{y \in X \mid y_i = x_i \ \forall i \in I \setminus \{j\}\}$ wie im Beweis von Satz 4.24
$\Rightarrow X_j(x)$ ist homöomorph zu X_j via p_j und da $X_j(x)$ ein Unterraum vom T_2 Raum X ist, ist er selbst T_2 und damit auch X_j. $\square$

Satz 5.7. *Seien $f, g : X \to Y$ stetig und Y sei hausdorffsch. Dann gilt:*

(i.) $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ *ist abgeschlossen.*

(ii.) *Ist* $A \subseteq X$ *und* $f_{|A} = g_{|A} \Rightarrow f_{|\overline{A}} = g_{|\overline{A}}$

(iii.) *Zu* $x \in X$ *sei*
$C(x) := \{\widetilde{x} \mid x \text{ und } \widetilde{x} \text{ lassen sich nicht durch offenen Mengen trennen}\}$
Dann gilt $\forall x \in X: \ f_{|C(x)} = const \equiv f(x)$

Beweis. zu (i.): Sei $B := \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ und $x \in B$, dann existieren $U, V \subseteq Y$ offen mit $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.
Da f, g stetig sind gilt $x \in f^{-1}(U)$ offen, $x \in g^{-1}(V)$ offen $\Rightarrow x \in W := f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ offen.
Es ist $W \subseteq B$ und damit ist B offen, also $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen.

zu (ii.): $A \subseteq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \overset{(i.)}{\Rightarrow} \overline{A} \subseteq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$

zu (iii.): Sei $y \in C(x)$.
Angenommen es ist $f(y) \neq f(x)$, dann kann man $f(x)$ und $f(y)$ durch U, V trennen, also $x \in U$, $y \in V$ mit $U, V \subseteq Y$ offen und disjunkt. Dann ist $x \in f^{-1}(U)$ offen und $y \in f^{-1}(V)$ offen und $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, also sind x, y trennbar, was im Widerspruch zu $y \in C(x)$ steht. $\square$

Bemerkung: (i.) und (ii.) gelten auch ohne Voraussetzungen an Y, wenn X das 1.Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

5.2 Konstruktion stetiger Funktionen: Das Lemma von Urysohn

Wir wollen nun stetige Funktionen in Folgendem Sinne konstruieren.
Es seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$. Gesucht ist eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f_{|A} \equiv 1$ und $f_{|B} \equiv 0$
Es ist notwendig, dass X ein T_4-Raum ist, da $A \subseteq f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$ offen und $B \subseteq f^{-1}((\frac{1}{2}, \infty))$ offen, also A und B dann durch offene, disjunkte Mengen trennbar sind. Es wird sich gleich zeigen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist.
Für metrische Räumen hatten wir ein solches f schon konstruiert: $f(x) = \frac{d_B(x)}{d_B(x) + d_A(x)}$

Lemma 5.8. *(von Urysohn)*
Sei X ein T_4-Raum, $A, B \subseteq X$ abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$. Dann existiert ein $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f_{|A} \equiv 1$ und $f_{|B} \equiv 0$

Bevor wir das Lemma beweisen können benötigen wir noch eine technische Eigenschaft von T_4 Räumen.

Lemma 5.9. *Es gilt:*
X ist T_4 $\Leftrightarrow$ *Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, $U \subseteq X$ offen und $A \subseteq U$,*
so existiert $V \subseteq X$ offen mit $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

Beweis. " $\Rightarrow$ " : $B := X \setminus U$ abgeschlossen, $A \subseteq U \Rightarrow A \cap B = \emptyset \overset{T_4}{\Rightarrow} \exists\, V_1, V_2 \subseteq X$ offen mit $A \subseteq V_1$, $B \subseteq V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
$A \subseteq V_1 \subseteq \underbrace{X \setminus V_2}_{\text{abg.}} \subseteq X \setminus B = U \Rightarrow A \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U$

" $\Leftarrow$ " : A, B abgeschlossen $\Rightarrow X \setminus B$ offen, $A \subseteq X \setminus B$
$\Rightarrow \exists\, V : \; A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus B$. Definiere $V_1 := V$ und $V_2 := X \setminus \overline{V}$, dann sind diese disjunkt und $A \subseteq V_1$, $B \subseteq V_2$ $\square$

Beweis. (des Lemmas von Urysohn)

$\mathscr{A} := (A_0, ..., A_r)$ heißt Stufenbereich $:\Leftrightarrow$ $A = A_0 \subseteq \mathring{A}_1 \subseteq \overline{A_1} \subseteq \mathring{A}_2 .... \subseteq \overline{A_{r-1}} \subseteq \mathring{A}_r = A_r = X \setminus B$ Auf $\mathscr{A}$ definiere Treppenfunktion $f_{\mathscr{A}} : X \to [0,1]$ durch:

$$(f_{\mathscr{A}})_{|A=A_0} = 1,\; (f_{\mathscr{A}})_{|(A_k \setminus A_{k-1})} = 1 - \frac{k}{r},\; 1 \leq k \leq r,\; (f_{\mathscr{A}})_{|B} = 0$$

(Treppenfunktion!)
Ein Stufenbereich $\mathscr{A}' = (A'_0, ...A'_{2r})$ heißt Verfeinerung von $\mathscr{A} :\Leftrightarrow A'_{2i} = A_i,\; 0 \leq i \leq r$
d.h. $\mathscr{A}' = (A'_0 = A_0,\; A'_1,\; A'_2 = A_1, ...)$
Nach dem vorbereitenden Lemma existiert in X zu jedem Stufenbereich eine Verfeinerung!
Sei nun $\mathscr{A}'$ eine Verfeinerung von $\mathscr{A} \Rightarrow$ (*):

$$f_{\mathscr{A}} \leq f_{\mathscr{A}'} \leq f_{\mathscr{A}} + \frac{1}{2r}$$

denn: sei $x \in A'_{2i} \setminus A'_{2i-1} \Rightarrow x \in A_i \setminus A_{i-1} \Rightarrow f_{\mathscr{A}'} = 1 - \frac{2i}{2r} = 1 - \frac{i}{r}$, sowie $f_{\mathscr{A}} = 1 - \frac{i}{r}$
sei $x \in A'_{2i+1} \setminus A'_{2i} \Rightarrow x \in A_{i+1} \setminus A_i \Rightarrow f_{\mathscr{A}'} = 1 - \frac{2i+1}{2r} = 1 - \frac{i+1}{r} + \frac{1}{2r}$, sowie $f_{\mathscr{A}} = 1 - \frac{i+1}{r}$
also gilt sogar immer auf einer Seite Gleichheit.

Wähle nun eine Folge von Stufenbereichen:
$\mathscr{A}_0 = (A,\; X \setminus B)$, $\mathscr{A}_1 = (A,\; A^1_1,\; A^1_2 = X \setminus B)$, $\mathscr{A}_2 = (A,\; A^2_1,\; A^2_2 = A^1_1,\; A^2_3,\; A^2_4 = X \setminus B)$, $....\mathscr{A}_n = (A^n_0, ..., A^n_{2^n})$
Es sei $f_n := f_{\mathscr{A}_n}$. Nach Ungleichung (*) gilt $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist für jedes x eine in $[0,1]$ monoton wachsende Folge.
Damit existiert $\forall x \in X$ der punktweise Limes: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$. Die auf diese Weise auf ganz X definierte Abbildung erfüllt offensichtlich $f_{|A} \equiv 1$ und $f_{|B} \equiv 0$. Es bleibt noch zu zeigen, dass f stetig ist. Zunächst zeigt man mit Gleichung (*), dass $\forall x \in X$ (**) gilt:

$$f_n(x) \overset{(i.)}{\leq} f(x) \overset{(ii.)}{\leq} f_n(x) + \sum_{k\geq n} \frac{1}{2^{k+1}} = f_n(x) + \frac{1}{2^n}$$

(i.) folgt direkt aus der Monotonie von $(f_n(x))$

(ii.) zeigt man mit (*) induktiv. Man sieht leicht, dass $\forall k \geq n : \; f_{k+1}(x) \leq f_n(x) + \sum\limits_{i=n}^{k} \frac{1}{2^{i+1}}$ gilt,

(ii.) folgt dann durch lim Bildung.

Mit (**) folgt nun die Stetigkeit von f:
Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und n so, dass $\frac{1}{2^{n-2}} < \epsilon$. Wir wollen zeigen, dass für jedes $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert, so dass $\forall y \in U : \; |f(y) - f(x)| < \epsilon$ gilt.
1.Fall: Sei $x \in B$. Definiere $U := X \setminus \overline{A^n_{2^n-1}} \supseteq B$
Für $y \in U \Rightarrow 0 = f_n(y) \overset{(**)}{\Rightarrow} f(y) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon\; \forall y \in U$
Da $x \in B \Rightarrow f(x) = 0$ und damit $|f(x) - f(y)| = |f(y)| < \epsilon$

Sei nun $x \notin B$ und $k \geq 0$ minimal mit $x \in \mathring{A}^n_{k+1}$

2.Fall: $k \geq 1$: Dann $x \notin \mathring{A}_k^n \supseteq \overline{A_{k-1}^n} \Rightarrow x \in \mathring{A}_{k+1}^n \setminus \overline{A_{k-1}^n} =: U$ offen
Sei $y \in U \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\overset{(**)}{\leq} \tfrac{1}{2^n} + |f_n(x) - f_n(y)| + \tfrac{1}{2^n} \\ &\overset{(*)}{\leq} \tfrac{1}{2^n} + \tfrac{1}{2^{n-1}} + \tfrac{1}{2^n} \\ &= \tfrac{1}{2^{n-1}} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

3.Fall: $k = 0$: Dann ist $x \in \mathring{A}_1^n =: U$ offen und $\forall y \in U$: $1 \geq f(y) \geq f_n(y) \geq 1 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow f(y) \in [1 - \frac{1}{2^n}, 1]$
$x, y \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$ □

Wir wollen nun eine noch allgemeinere Version dieses Lemmas kennenlernen, dazu benötigen wir aber zunächst eine Aussage über die Konvergenz von Funktionenfolgen:

Definition 5.10. *Sei $f_n : X \to Y$ eine Folge von Funktionen und sei $(X, \mathscr{O})$ ein beliebiger topologischer, sowie (Y, d) ein metrischer Raum. Dann heißt f_n gleichmäßig konvergent gegen $f : X \to Y$, falls gilt:*

$$\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \to 0$$

Lemma 5.11. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer und (Y, d) ein metrischer Raum.*

(i.) Sind die $f_n : X \to A \subseteq Y$ stetig und f ihr gleichmäßiger Limes, so ist f stetig.

(ii.) Es sei Y zusätzlich vollständig.
Erfüllt die Folge $f_n : X \to A \subseteq Y$ das Cauchykriterium, d.h: für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{x \in X} d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon, \ \forall n, m > N$$

so existiert ein $f : X \to \overline{A}$, so dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweis. zu (i.): Seien die f_n, $n \in \mathbb{N}$ stetig und f der gleichmäßige Limes der f_n
Z.z.: f ist stetig.
Sei $x \in X$. Es ist zu zeigen, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine Umgebung U von x existiert, so dass $d(f(x), f(y)) < \epsilon \ \forall y \in U$.
Sei also $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) < \epsilon, \ \forall n, m \geq N$ und eine Umgebung $U = U(N)$ von x, so dass $d(f_N(x), f_N(y)) < \epsilon, \ \forall y \in U$ (f_N stetig), dann gilt für alle $y \in U$:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(y)) + d(f_N(y), f(y)) \\ &\leq \sup_{x \in X} d(f(x), f(y)) + \epsilon + \sup_{y \in X} d(f_N(y), f(y)) < 3\epsilon \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

zu (ii.): Es gilt, dass für jedes x die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y darstellt und demnach ein Grenzwert existiert (Y vollständig).
Wir bezeichnen diesen mit $f(x)$ (Y ist hausdorffsch, also sind Grenzwerte eindeutig)
Die auf diese Weise definierte Abbildung $f : X \to Y$ ist wohldefiniert und ihr Bild $f(X)$ liegt sogar in $\overline{A}$ nach Satz 3.16.
Wir zeigen nun, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert:
Es ist $|d(f(x_n), f(x_m)) - d(f(x_n), f(x))| \leq d(f(x_m), f(x))$ nach der Umgekehrten Dreiecksungleichung und damit

$$\lim_{m \to \infty} |d(f(x_n), f(x_m)) - d(f(x_n), f(x))| \leq \lim_{m \to \infty} d(f(x_m), f(x)) = 0$$

also $\lim_{m\to\infty} d(f(x_n), f(x_m)) = d(f(x_n), f(x))$
Sie nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass $d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon,\ \forall n, m > N,\ \forall x \in X$, dann folgt durch lim Bildung auf der linken Seite:

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon,\ \forall n > N$$

und das N ist von x unabhängig, also

$$\sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon,\ \forall n > N$$

□

Aus dem Lemma von Urysohn kann man das folgende Erweiterungslemma von Tietzsch folgern, welches die Aussage von Urysohn verallgemeinert.

Lemma 5.12. *Sei X ein T_4-Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to [a, b]$ stetig. Dann existiert ein $F : X \to [a, b]$ stetig mit $F_{|A} = f$*

Beweis. 1.Schritt: Sei $g : A \to [-1, 1]$ stetig, nicht konstant und $S := \sup_{x\in A} |g(x)|$.
Da g nicht konstant ist, ist $S > 0$.
Es existiert ein $G : X \to [-1, 1]$ stetig mit:

(a.) $\sup_{x\in X} |G(x)| \leq \frac{S}{3}$

(b.) $\sup_{x\in A} |G(x) - g(x)| \leq \frac{2S}{3}$

denn:
Setze $B := g^{-1}([-S, -\frac{S}{3}]),\ C := g^{-1}([\frac{S}{3}, S])$ abgeschlossen in A und damit (da A abgeschlossen) auch abgeschlossen in X und $B \cap C = \emptyset$.
$\overset{5.8}{\Rightarrow} \exists\ G : X \to [-\frac{S}{3}, \frac{S}{3}]$ stetig mit $G_{|B} = -\frac{S}{3},\ G_{|A} = \frac{S}{3}$
(zu $\widetilde{G} : X \to [0, 1]$ mit $\widetilde{G}_{|B} = 0$ und $\widetilde{G}_{|A} = 1$, wähle $\phi : [0, 1] \to [-\frac{S}{3}, \frac{S}{3}]$ mit $\phi(t) = \frac{2S}{3}t - \frac{S}{3} \Rightarrow G = \phi \circ \widetilde{G}$ ist die gesuchte Abbildung)

2.Schritt: Sei nun zunächst f wie g, also $f : A \to [-1, 1]$ stetig, nicht konstant, dann gilt nach Schritt 1, mit $g := f$:
$\sup_{x\in A} |f(x)| \leq 1$ und es existiert ein $F_1 : X \to [-1, 1]$ mit

$(a.)_1$ $\sup_{x\in X} |F_1(x)| \leq \frac{1}{3}$

$(b.)_1$ $\sup_{x\in A} |F_1(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3}$

Setze nun $g := f - (F_1)_{|A}$, dann ist $\sup_{x\in A} |g(x)| \leq \frac{2}{3}$ und es existiert nach Schritt 1 ein $F_2 : X \to [-1, 1]$ mit

$(a.)_2$ $\sup_{x\in X} |F_2(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

$(b.)_2$ $\sup_{x\in A} |F_2(x) - (f(x) - F_1(x))| \leq (\frac{2}{3})^2$

Man erhält induktiv Funktionen $F_n : X \to [-1, 1]$ mit

$(a.)_n$ $\sup_{x\in X} |F_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$

$(b.)_n$ $\sup\limits_{x\in A}\left|\sum\limits_{i=1}^{n} F_i(x) - f(x)\right| \leq (\frac{2}{3})^n$

3.Schritt: Es gilt, dass zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$\sup_{x\in X}\left|\sum_{i=k}^{n} F_i(x)\right| \leq \frac{1}{3}\sum_{i=k}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n < \epsilon,\ \forall k,n > N$$

und damit konvergiert $\widetilde{F}_n := \sum\limits_{i=1}^{n} F_i(x)$ gleichmäßig gegen eine Funktion
$\widetilde{F} : X \to \mathbb{R}$ nach (5.11)
Diese ist nach (5.11) dann auch automatisch stetig und es gilt:

$$|\widetilde{F}(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |F_n(x)| \leq \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

Damit ist $\widetilde{F} : X \to [-1,1]$ und nach (b_n) ist $\widetilde{F}_{|A} = f$.

4.Schritt: Sei nun $f : A \to [a,b]$ nicht konstant und $\phi : [a,b] \to [-1,1]$ definiert durch $\phi(t) := \frac{2}{b-a}t + \frac{a+b}{a-b}$ stetig, bijektiv.
Dann ist $\phi \circ f : A \to [-1,1]$ stetig und nach obigem existiert ein $\widetilde{F} : X \to [-1,1]$ stetig mit $\widetilde{F}_{|A} = f$.
Durch $F := \phi^{-1} \circ \widetilde{F} : X \to [a,b]$ wird dann die gesuchte Funktion aus dem Lemma definiert, denn F ist stetig und $F_{|A} = \phi^{-1} \circ \phi \circ f = f$

5.Schritt: Ist $f : A \to [a,b]$ konstant $f \equiv c$, so wähle $F \equiv c$ □

Bemerkung:

(i.) Aus Tietzsch folgt Urysohn, denn $f : A \cup B \to [0,1]$ $f_{|A} = 1,\ f_{|B} = 0$ ist stetig.

(ii.) Ein Beispiel zur Notwendigkeit der Abgeschlossenheit in Tietsch:
$f : (0,\infty) \to [-1,1],\ f(x) := \sin(\frac{1}{x})$ ist stetig, aber nicht stetig nach $[0,\infty)$ fortsetzbar.

6 Kompaktheit

Eine der wichtigsten Eigenschaften topologischer Räume ist die Kompaktheit, da solche Räume viele güstige Eigenschaften besitzen. Wir wollen uns zunächst der Definition und den Eigenschaften kompakter Rume zuwenden und uns dann spter, in Kapitel 8, auch damit beschäftigen, wann ein nicht kompakter Raum in einen kompakten Raum eingebettet werden kann.

Definition 6.1. *(i.) Sei X ein toplogischer Raum. Ein System $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Mengen in X heißt* ***offene Überdeckung von*** *X, falls $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ gilt.*

(ii.) Ein topologischer Raum X heißt ***kompakt****, falls jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h. es gibt ein $J \subseteq I$ endlich und $X = \bigcup\limits_{i\in J} U_i$*

(iii.) $A \subseteq X$ heißt kompakt wenn $(A, \mathscr{O}_A)$ kompakt ist

Bemerkung:

(i.) $A \subseteq X$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ Ist $(U_i)_{i\in I}$ System offener Mengen mit $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, so existiert $J \subseteq I$ endlich mit $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} U_i$

(ii.) $A \subseteq X$ endlich $\Rightarrow$ A kompakt.

Wir wollen nun ein Beispiel für einen typischen „Kompaktheitsschluß“ sehen:

Beispiel 6.2. *Sei X kompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt*
(d.h: $\forall x \in X$ $\exists$ offene Umgebung U_x von x und ein $C_x \in [0,\infty)$: $\forall y \in U_x \;\Rightarrow\; |f(y)| \le C_x$)
Dann ist f beschränkt.

Beweis. Es gilt $X = \bigcup\limits_{x\in X} U_x \overset{X \text{ kompakt}}{\Rightarrow} \exists\, n \in \mathbb{N}$ und $x_1, ..., x_n \in X$, so dass $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} \Rightarrow \forall x \in X :\; |f(x)| \le \max\limits_{i=1,...,n} C_{x_i} < \infty \Rightarrow\; f$ beschränkt. □

Damit sind insbesondere stetige Funktionen auf kompakten Räumen beschränkt, da stetig natürlich lokal beschränkt impliziert.

Beispiel 6.3. *Sei X kompakt und $A \subseteq X$ mit $\#A = \infty$*
$\Rightarrow \exists\; x \in X$: Jede Umgebung von x enthält unendlich viele Elemente von A.

Beweis. Angenommen es gilt nicht $\Rightarrow \forall x \in X$ $\exists$ Umgebung U_x und $\#(A \cap U_x) < \infty$. Da aber $(U_x)_{x\in X}$ eine Überdeckung von X ist, reichen schon endlich viele U_{x_i} aus um X zu überdecken und es gilt: $\#A = \#\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A \cap U_{x_i}\right) < \infty$. Widerspruch. □

6.1 Eigenschaften von kompakten Räumen

Satz 6.4. *(i.) X kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow$ A kompakt*

(ii.) Sei X hausdorffsch. Dann gilt: $A \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow$ A abgeschlossen.

Beweis. <u>zu (i.):</u> Sei $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, $U_i \subseteq X$ offen $\Rightarrow X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i \cup \underbrace{(X \setminus A)}_{\text{offen}}$

$\Rightarrow\ \exists\ J \subseteq I$ endlich : $\ X = \bigcup\limits_{i\in J} U_i \cup (X \setminus A)$

$\Rightarrow\ A \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} U_i \Rightarrow\ A$ kompakt.

<u>zu (ii.):</u> Zeige: Wenn $x \notin A$ existieren $U, V \subseteq X$ offen mit $x \in U$ und $A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$ (insbesondere folgt hieraus nämlich, dass $X \setminus A$ offen ist)
Da X hausdorffsch ist $\Rightarrow \forall y \in A\ \exists\ U_y, V_y \subseteq X$ offen mit $x \in U_y, y \in V_y$ und $U_y \cap V_y = \emptyset$
Da A kompakt $\Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$ und $y_1, ...y_n \in A:\ \ A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i} =: V$ offen und $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i} =: U$ offen, mit $U \cap V = \emptyset$. □

Satz 6.5. *X sei kompakt und hausdorffsch $\Rightarrow X$ normal.*

Beweis. Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$ Z.z. : $\exists\ U, V \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U, B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$
Nach Satz 6.4 (i.) $\Rightarrow$ B kompakt und im Beweis wurde gezeigt $\forall x \in A\ \exists\ U_x, V_x$ offen mit $B \subseteq V_x,\ x \in U_x$ und $U_x \cap V_x = \emptyset$
Da A kompakt ist $\Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$ und $x_1, ..., x_n \in A:\ \ A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} =: U$ offen und $B \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i} =: V$ offen mit $U \cap V = \emptyset$ □

Lemma 6.6. *Sei X topologischer Raum. Dann gilt*

(i.) *$K_1, ...K_n$ kompakte Teilmengen von $X \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ kompakt.*

(ii.) *Sei X hausdorffsch. Dann gilt:*
$(K_i)_{i\in I}$ kompakt in $X \Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} K_i$ kompakt.

Beweis. (i.) ist klar
<u>zu (ii.):</u> Nach Satz 6.4 (ii.) sind $(K_i)_{i\in I}$ abgeschlossen $\Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} K_i \subseteq K_1$ ist abgeschlossen. Da K_1 kompakt ist, ist $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$ als Teilraum von K_1 kompakt (Satz 6.4 (i.)). Dann ist $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$ aber auch als Teilraum von X kompakt. □

Wenn man prüfen will ob eine Abbildung $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus ist, macht besonders das nachprüfen der Offenheit (bzw. Stetigkeit von f^{-1}) oft einige Probleme. Der folgende Satz besagt, dass dies, im Fall, dass X kompakt und Y hausdorffsch ist, gar nicht nötig ist.

Satz 6.7. *Sei X kompakt. $f : X \to Y$ stetig. Dann gilt:*

(i.) *$f(X)$ ist kompakt (als Unterraum von Y)*

(ii.) *Ist f bijektiv und Y hausdorffsch, so ist $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. (i.) ist wieder klar.
<u>zu (ii.):</u> Es ist noch zu zeigen, dass f offen ist. Sei also U offen in $X \Rightarrow X \setminus U$ abgeschlossen.

$$f(X \setminus U) \overset{\text{injektiv}}{=} f(X) \setminus f(U) \overset{\text{surjektiv}}{=} Y \setminus f(U)$$

Nach (6.4) (i.) ist $X \setminus U$ kompakt in X und wegen obigem, ist dann $f(X \setminus U)$ kompakt. Da Y hausdorffsch ist, folgt mit (6.4) (ii.), dass $f(X \setminus U)$ abgeschlossen ist.
Also ist $Y \setminus f(U)$ abgeschlossen in Y und damit ist $f(U)$ offen. □

Bemerkung: Obiger Satz ist i.a. nicht richtig wenn X nicht kompakt ist. So ist nämlich

$$f : [0,1) \to S^1 \quad f(t) := \exp(2\pi i t)$$

stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus, da $f([0,\frac{1}{2}))$ ein halboffenes Segment des Kreises S^1 ist, also nicht offen ist, whrend $[0,\frac{1}{2})$ offen in $[0,1]$ ist.

Im folgenden soll die aus der Analysis wohlbekannte Tatsache bewiesen werden, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Supremum und Infimum annehmen.

Satz 6.8. *Sei $X \neq \emptyset$ kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \inf\{f(x) \mid x \in X\} =: m > -\infty \\ f(x_1) &= \sup\{f(x) \mid x \in X\} =: M < \infty \end{aligned}$$

Beweis. Da wir schon wissen, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt sind, folgt $m > -\infty,\ M < \infty$
Wir zeigen die Aussage nun nur für das Infimum. (Supremum geht analog)
Annahme: Es existiert kein x_0 mit $f(x_0) = m \Rightarrow f(x) > m,\ \forall x \in X$
$\Rightarrow\ \forall x \in X\ \exists\, U_x \subseteq X$ offen mit $x \in U_x$ und ein $\epsilon_x > 0$ mit $f_{|U_x} > m + \epsilon_x$
(dies folgt aus der Stetigkeit mit $\epsilon_x = \frac{1}{2}(f(x) - m)$)
Da X kompakt $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N},\ x_1, ...x_n \in X : \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$
Wähle $\epsilon := \min_{i=1,...n} \epsilon_{x_i} \Rightarrow\ \forall x \in X : f(x) > m + \epsilon\ \Rightarrow\ m \geq m + \epsilon$
Dies ist ein Widerspruch und deshalb folgt die Behauptung. □

Man will nun die Kompaktheit etwas anschaulicher formulieren und definiert dazu den Begriff der Folgenkompaktheit.

Definition 6.9. *X heißt **folgenkompakt**, falls zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Teilfolge und ein $x \in X$ existiert, so dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.*

Satz 6.10. *Erfüllt X das 1.Abzählbarkeitsaxiom, so gilt:*

$$X \text{ kompakt} \ \Rightarrow\ X \text{ folgenkompakt}$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und X kompakt.
$A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$
Wir zeigen zunächst, dass ein x existiert, so dass für alle Umgebungen U von x: $\#\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\} = \infty$ (*)

1.Fall: $\#A = \infty$, dann folgt nach Bespiel 6.3, dass es ein $x \in X$ gibt, so dass für alle Umgebungen U von x: $\#(A \cap U) = \infty$
$\Rightarrow\ \#\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\} = \infty$
2.Fall: $\#A < \infty \Rightarrow\ \exists\, x \in X : x_n = x$ für unendlich viele n
$\Rightarrow\ \#\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\} = \infty$ für alle Umgebungen U von x.

Sei nun x aus (*) gewählt und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x mit $U_1 \supseteq U_2 \supseteq ....$ (**)
Wähle $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton steigend mit $x_{i(n)} \in U_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ (geht, wegen (*))
Dann ist aber $x_{i(n)} \to x$, denn:
Sei U eine Umgebung von $x \Rightarrow\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ x \in U_{n_0} \subseteq U$ und nach Konstruktion und (**) gilt $x_{i(n)} \in U_{n_0},\ \forall n \geq n_0$ □

Satz 6.11. *X erfülle das 2.Abzählbarkeitsaxiom. Dann gilt:*

$$X \text{ kompakt} \ \Leftrightarrow\ X \text{ folgenkompakt}$$

Beweis. " $\Rightarrow$ " : klar nach dem vorherigen Satz.
" $\Leftarrow$ " : Wir zeigen zunächst: Jede offene Überdeckung hat eine abzählbare Teilüberdeckung.
Sei $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{O}_X$ abzählbare Basis der Topologie und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X.
Sei $x \in X \;\Rightarrow\; \exists i \in I$ und $B_x \in \mathscr{B}$ mit $x \in B_x \subseteq U_i$.
Sei $\widetilde{\mathscr{B}} := \{B_x \mid x \in X\} \subseteq \mathscr{B}$
Zu jedem $B \in \widetilde{\mathscr{B}}$ wähle $i(B) \in I$ mit $B \subseteq U_{i(B)}$.
$i : \widetilde{\mathscr{B}} \to I$ ist eine Abbildung von einer abzählbaren Menge $\widetilde{\mathscr{B}}$ nach I, damit ist $J := i(\widetilde{\mathscr{B}})$ abzählbar und es gilt $X = \bigcup\limits_{i\in J} U_i$
Also existiert eine abzählbare Überdeckung.

Angenommen es reichen nicht endlich viele dieser U_i aus um X zu überdecken. Seien die U_i nun durch die natürlichen Zahlen indiziert (geht, da J abzählbar), dann gilt nach Umbenennung $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und es gilt:
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$
denn sonst wären ja gerade endlich viele U_i ausreichend um X zu überdecken.
Nach Voraussetzung hat (x_n) eine konvergente Teilfolge $(x_{i(n)})$ ($i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, streng monoton steigend) mit $x_{i(n)} \overset{n\to\infty}{\to} x$
Es existiert ein $j_0 \in N :\ x \in U_{j_0}$, da U_i eine Überdeckung ist. Damit folgt $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ x_{i(n)} \in U_{j_0}$ wegen der Konvergenz.
Allerdings gilt $x_i \notin U_{j_0}\ \forall i \geq j_0$ nach Konstruktion. Wählt man also n so, dass $i(n) > j_0$ wird ergibt sich ein Widerspruch. □

Folgerung 6.12. *Sei (X, d) metrisch. Dann gilt:*

$$X \text{ kompakt } \Leftrightarrow\ X \text{ folgenkompakt}$$

Um diese Folgerung zeigen zu können brauchen wir noch das folgende Lemma mit dem wir dann zeigen können, dass folgenkompakte metrische Räume das 2.Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

Lemma 6.13. (X, d) *sei folgenkompakt*
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ A \subseteq X$ *endlich:* $\bigcup\limits_{x\in A} B(x, \epsilon) = X$

Beweis. Angenommen: $\exists\ \epsilon > 0 :\ A \subseteq X$ endlich $\Rightarrow\ X \setminus (\bigcup\limits_{x\in A} B(x, \epsilon)) \neq \emptyset$
Wähle dann $x_0 \in X$ beliebig und induktiv $x_{n+1} \in X,\ x_{n+1} \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$
$\Rightarrow\ \forall n > m :\ d(x_n, x_m) \geq \epsilon$
Dann hat aber (x_n) keine konvergente Teilfoge, da konvergente Folgen Cauchyfolgen sind. Widerspruch. □

Beweis. (von Folgerung 6.12) " $\Rightarrow$ " : ist klar nach Satz 6.10, da X metrisch ist, also das 1.Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.
" $\Leftarrow$ " : Es ist nur zu zeigen, dass X eine abzählbare Basis besitzt, denn dann folgt die Behauptung aus Satz 6.11.
Nach obigem Lemma gilt also nun, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge $A_n \subseteq X$ existiert mit $\bigcup\limits_{x\in A_n} B(x, \frac{1}{n}) = X$
$\Rightarrow\ \mathscr{B} = \{B(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N},\ x \in A_n\}$ abzählbar. Noch ZZ: $\mathscr{B}$ ist Basis.
Sei $U \subseteq X$ offen und $y \in U \Rightarrow\ \exists\ \epsilon > 0 :\ B(y, \epsilon) \subseteq U$
Es gilt aber $\forall n \in N\ \exists\ A_n$ und ein $x_n \in A_n$ mit $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$
Wähle nun n so, dass $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow y \in B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq B(y, \epsilon) \subseteq U$.
Also ist $\mathscr{B}$ eine Basis. □

Bemerkung: Insbesondere haben kompakte metrische Räume also stets eine abzählbare Basis ihrer Topologie!

Im $\mathbb{R}^n$ und in jedem anderen endlich dimensionalen $\mathbb{R}-$VR gibt es eine besonders anschauliche Deutung der Kompaktheit. Eine Menge ist dort kompakt genau dann wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Definition 6.14. *Sei $(V, ||.||)$ ein normierter $\mathbb{K}-$ VR. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heißt* ***beschränkt*** *bezügl $||.||$, falls ein $C > 0$ existiert mit:*

$$||w|| \leq C \ \forall w \in A$$

Bemerkung: In endlich dimensionalen $\mathbb{K}-$VR sind alle Normen äquivalent und der Begriff der Beschränktheit demnach von der Norm unabhängig.

Satz 6.15. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie. Dann gilt:*

$$A \text{ kompakt} \ \Leftrightarrow \ A \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

Beweis. Man wählt sich auf $\mathbb{R}^n$ die Maximumsnorm $||(x_1, ..., x_n)|| := \max\limits_{i=1,...n} |x_i|$, die wie jeder andere Norm die übliche Topologie induziert.
" $\Rightarrow$ " : Angenommen A ist nicht beschränkt, dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$ mit $||x_n|| > n$ (*). Diese Folge hat aber keine in A konvergente Teilfoge, denn angenommen $x_{j(n)}$ ($j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend) ist eine gegen $x \in A$ konvergente Teilfoge, dann gilt

$$||x_{j(n)}|| \leq ||x|| + ||x_{j(n)} - x|| \leq ||x|| + 1 =: C_0$$

für alle $n > n_0$.
Dies wird aber widersprüchlich zu (*) für große n.
Damit ist A beschränkt.

A ist abgeschlossen nach (6.4) (ii.)

" $\Leftarrow$ " : Es reicht zu zeigen, dass A folgenkompakt ist (da A metrisch)
Sei also $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A.
Sei $(x_i) = (x_i^1, ..., x_i^n)$, dann existiert nach Voraussetzung und Definition der Norm ein $C > 0$ mit $|x_i^k| \leq ||x_i|| \leq C \ \forall k \in \{1, ..., n\}, \forall i \in \mathbb{N}$
Nach dem aus der Analysis bekannten Satz von Bolzano und Weierstraß existiert demnach ein $j_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend und ein $x^1 \in \mathbb{R}$ mit $x_i^1 \overset{i\to\infty}{\to} x^1$.
Nun ist natürlich auch $(x^2_{j_1(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ beschränkt und hat daher wieder eine konvergente Teilfolge $(x^2_{j_2\circ j_1(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ (sagen wir mit Grenzwert x^2).
Damit erhält man nach endlich vielen Schritten eine konvergente Teilfoge
$(x^n_{\underbrace{j_n \circ ... \circ j_1}_{:=j}(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ von $(x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$.

Es ist nun $(x^k_{j(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ für jedes $k = 1, ..., n$ eine gegen x_k konvergente Folge (da immer Teilfolgen von Teilfolgen gewählt wurden).
Dann existiert zu $\epsilon > 0$ ein i_k, so dass $\forall i \geq i_k$: $|x^k_{j(i)} - x^k| < \epsilon$ gilt.
Sei $x := (x^1, ..., x^n)$, dann gilt für $i_0 := \max\limits_{k=1,..n} i_k$:

$$||x_{j(i)} - x|| = \max_{k=1,...n} |x^k_{j(i)} - x^k| < \epsilon \ \forall i \geq i_0$$

Also $x_{j(i)} \overset{i\to\infty}{\to} x$ und da A abgeschlossen ist folgt damit $x \in A$. □

Bemerkung: Der Satz gilt auch für beliebige endlich dimensionale $\mathbb{R}-$ Vektorräume mit der üblichen Topologie.
Denn wenn V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-VR ist, so hat V eine Basis $v_1, ..., v_n$ und die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to V$, $\phi(e_i) = v_i$ ist ein Isomorphismus.
Ist $|.|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und definiert man durch $||v|| := |\phi^{-1}(v)|$ eine Norm auf V, so ist ϕ automatisch eine Isometrie (d.h. $||\phi(v)|| = |v|$) , also auch stetig und die beiden Normen induzieren wegen der Normäquivalenz natürlich jeweils die üblichen Topologien. Es gilt dann:
K kompakt in $V \overset{\phi,\phi^{-1} \text{ stetig}}{\Longleftrightarrow} \phi^{-1}(K)$ kompakt in $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \phi^{-1}(K)$ abgeschlossen und beschränkt $\overset{\phi,\phi^{-1} \text{ stetig, isometrisch}}{\Longleftrightarrow} K$ abgeschlossen und beschränkt

6.2 Metrisierbarkeit

Eine interessante Fragestellung in der Topologie, die wir weiter oben schon angesprochen hatten, ist wann zu einer Topologie $\mathscr{O}$ auf X eine Metrik d auf X existiert, so dass $\mathscr{O} = \mathscr{O}(d)$ gilt.
Wir werden sehen, dass dies für kompakte Räume X genau dann gilt wenn X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis ist.
Zunächst zeigen wir folgendes Lemma zur Metrisierbarkeit der Produkttopologie

Lemma 6.16. *Seien $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ metrische Räume und $d_n \leq 1$*
Sei $X := \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ und $\mathscr{O}$ die von den $\mathscr{O}_n := \mathscr{O}(d_n)$ erzeugte Produkttopologie.
Außerdem sei eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mittels der konvergenten ($d_n \leq 1$) Reihe $d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$ definiert.
Dann definiert dies eine Metrik auf X und $\mathscr{O}(d) = \mathscr{O}$. Also ist X metrisierbar.

Beweis. 1.Schritt: Zeige d ist eine Metrik.
Seien also $x, y \in X$ mit $d(x, y) = 0 \Rightarrow d(x_n, y_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ x_n = y_n \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ x = y$
Seien $x, y, z \in X \Rightarrow d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n)) = d(x, z) + d(z, y)$
Da die Symmetrie offensichtlich ist, folgt, dass d eine Metrik ist.

2.Schritt: $\mathbb{Z}$: $\mathscr{O} = \mathscr{O}(d)$
Sei $O \in \mathscr{O}(d)$ und $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in O \Rightarrow \exists\ \epsilon > 0 : \ B^d(x, \epsilon) \subseteq O$
Wähle k_0 so, dass $\sum_{n=k_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$ und betrachte
$V := \prod_{i=1}^{\infty} V_i$ mit $V_1 = B^{d_1}(x_1, \frac{\epsilon}{4}), ..., V_{k_0} = B^{d_{k_0}}(x_{k_0}, \frac{\epsilon}{4}),\ V_i = X_i,\ i > k_0$
$\Rightarrow \ V \subseteq B^d(x, \epsilon)$, denn sei $y \in V$
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
d(y, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(y_n, x_n) = \sum_{n=1}^{k_0} 2^{-n} \underbrace{d(x_n, y_n)}_{\leq \frac{\epsilon}{4}} + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} 2^{-n} \underbrace{d(x_n, y_n)}_{\leq 1} \\
&\leq \frac{\epsilon}{4} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{k_0} 2^{-n}}_{<1} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Damit existiert zu jedem $x \in O$ eine Basismenge V_x der Produkttopologie mit: $x \in V_x \subseteq B^d(x, \epsilon) \subseteq O$. Also ist $O = \bigcup_{x\in O} V_x$ offen in Produkttopologie, also $O \in \mathscr{O}$

Sei nun $O \in \mathscr{O}$ und $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in O$
$\Rightarrow \exists\, V \in \mathscr{B}$ (Basis von $\mathscr{O}$) mit $x \in V \subseteq O$, $V = \prod_{i=1}^{\infty} V_i$, $V_i \in \mathscr{O}_i$.
Nach Definition der Basis gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $V_i = X_i,\ \forall i > m$
Da $V_i \in \mathscr{O}_i \Rightarrow \forall i \leq m\ \exists\, \epsilon_i > 0:\ B^{d_i}(x_i, \epsilon_i) \subseteq V_i$
Sei nun $\epsilon := 2^{-m} \cdot \min_{i=1,\dots,m} \{\epsilon_i\} \Rightarrow\ B^d(x,\epsilon) \subseteq V \subseteq O$ (und damit ist $O \in \mathscr{O}(d)$), denn sei $y \in B^d(x,\epsilon)$ dann gilt für $i \leq m:\ d_i(x_i, y_i) \leq 2^m d(x,y) < 2^m \epsilon = \min_{i=1,\dots,m} \{\epsilon_i\} \leq \epsilon_i\ \Rightarrow y_i \in V_i$
für $i > m$ ist $V_i = X_i$ und es ist nichts zu zeigen, also folgt die Behauptung. □

<u>Bemerkung:</u>

(i.) Es sei noch bemerkt, dass $d_n \leq 1$ keine Einschränkung ist, denn wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, so definiert
$$\widetilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$
eine Metrik auf X mit $\widetilde{d} \leq 1$ und $\mathscr{O}(d) = \mathscr{O}(\widetilde{d})$

(ii.) Insbesondere ist also jedes abzählbare Produkt metrischer Räume metrisierbar.

(iii.) Ist in Lemma 6.21 $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, also ein endliches Produkt, so ist $\mathscr{O}(d) = \mathscr{O}(\widetilde{d})$ mit $\widetilde{d}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$.
Dies zeigt man analog, das Gewicht im Lemma ist nur da um die Konvergenz der Reihe sicherzustellen.

Beispiel 6.17. *Der Produktraum* $W := \prod_{n=1}^{\infty} I_n$ *mit* $I_n = [0,1]$ *ist metrisierbar. Er wird* ***Hilbertwürfel*** *genannt.*

Satz 6.18. *Sei X kompakt, hausdorffsch mit abzählbarer Basis. Dann gilt:*

X ist homöomorph zu einer Teilmenge des Hilbertwürfels

Bevor wir dies beweisen können, benötigen wir noch folgendes kleines Lemma über T_4 Räume.

Lemma 6.19. *Sei X T_4 Raum und $x, y \in X$*
$\Rightarrow \exists\, U, V$ offen $x \in U,\ y \in V$ und $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$

Beweis. $\{x\}, \{y\}$ sind abgeschlossen, also existieren disjunkte, offene U_1, V mit $x \in U_1, y \in V$
$\Rightarrow\ x \in X \setminus \overline{V}$ denn sonst wäre der Schnitt von V mit jeder Umgebung von x, also auch U_1, nicht leer.
Da X T_4 ist existieren nun disjunkte, offene Mengen U, V_1 mit $x \in U$, $\overline{V} \subseteq V_1$
$$\Rightarrow\ U \subseteq \underbrace{X \setminus V_1}_{\text{abgeschlossen}} \subseteq X \setminus \overline{V} \Rightarrow\ \overline{U} \subseteq X \setminus \overline{V}$$
also ist $x \in U$, $y \in V$ und $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ □

Beweis. (von Satz 6.18) Sei $\mathscr{B} := \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X.
$A := \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \overline{U_k} \cap \overline{U_l} = \emptyset\}$ ist abzählbar und es ist $A \neq \emptyset$ (siehe unten)
Wir wissen schon, dass A, als kompakter Hausdorffraum, normal ist. Nach dem Lemma von Urysohn gilt:
$\forall (k,l) \in A\ \exists\, f_{(k,l)} : X \to [0,1]$ stetig mit $(f_{(k,l)})_{|\overline{U_k}} \equiv 1$ und $(f_{(k,l)})_{|\overline{U_l}} \equiv 0$
Sei $f_1, f_2, \dots$ eine Abzählung dieser Funktionen. (falls $\#A < \infty$ setze $f_n \equiv 1$ für $n > \#A$)

Definiere
$$f: X \to W \text{ durch } f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$$
d.h. $f_n = p_n \circ f \ \forall n \in \mathbb{N}$ und damit folgt aus Satz 3.4 (v.) direkt die Stetigkeit von f bezüglich $\mathscr{O}_X - \mathscr{O}_W$ mit $\mathscr{O}_W =$ Produktopologie des Hilbertwürfels.

f ist injektiv: Sei $x \neq y,\ x, y \in X$, dann existieren nach dem vorbereitenden Lemma offene Mengen U_x, U_y mit $x \in U_x,\ y \in U_y$ und $\overline{U_x} \cap \overline{U_y} = \emptyset$
Da $\mathscr{B}$ eine Basis ist $\exists\ k, l \in \mathbb{N}:\ \ x \in U_k \subseteq U_x,\ \ y \in U_l \subseteq U_y$ und es ist $\overline{U_k} \cap \overline{U_l} = \emptyset$, also ist $(k, l) \in A$ (und insbesondere $A \neq \emptyset$).
Damit gilt nach Definition $f_{(k.l)}(x) = 1,\ f_{(k,l)}(y) = 0 \Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N}: f_n(x) = 1,\ f_n(y) = 0$
$\Rightarrow\ f(x) \neq f(y)$, also ist f injektiv.

Damit ist nun also $f: X \to f(X) \subseteq W$ stetig (bzgl. $\mathscr{O}_X - (\mathscr{O}_W)_{f(X)}$) und bijektiv.
Da X kompakt und $f(X)$ hausdorffsch ist, folgt nach Satz 6.7 (ii.), dass f ein Homöomorphismus ist. □

Damit erhalten wir nun das Resultat

Folgerung 6.20. *Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ kompakt.*
X ist genau dann metrisierbar, wenn X hausdorffsch ist und eine abzählbare Basis besitzt.

Beweis. " $\Rightarrow$: " Sei d eine Metrik auf X mit $\mathscr{O}(d) = \mathscr{O}_X$, dann ist X hausdorffsch und da X kompakt ist, besitzt X auch eine abzählbare Basis (siehe Bemerkung nach Satz 6.12)

" $\Leftarrow$ " : Nach Satz 6.18 existiert ein Homöomorphismus $f: X \to f(X) \subseteq W$ (bzgl $\mathscr{O}_X - (\mathscr{O}_W)_{f(X)}$)
W ist metrisierbar mit d' und es ist dann natürlich auch $\mathscr{O}(d'_{|f(X)\times f(X)}) = (\mathscr{O}_W)_{f(X)}$ nach Besipiel 2.2 (ii.).
Also ist X homöomorph zu einem metrischen Raum, dann ist X aber metrisierbar, wie wir im folgenden Lemma zeigen. □

Lemma 6.21. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer und (Y, d) ein metrischer Raum und $f: X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann ist X metrisierbar.*

Beweis. Definiere $d_X: X \times X \to \mathbb{R}$ als $d_X(x_1, x_2) := d(f(x_1), f(x_2))$
Aus der Injektivität von f folgt, dass d_X eine Metrik auf X ist. Bleibt nur zu zeigen, dass $\mathscr{O}(d_X) = \mathscr{O}$ ist.
Sei also $O \in \mathscr{O}(d_X)$
$x \in O \Rightarrow\ \exists\ \epsilon > 0:\ B^{d_X}(x, \epsilon) \subseteq O$
Aus der Bijektivität und der Definition folgt $B^{d_X}(x, \epsilon) = f^{-1}(B^d(f(x), \epsilon)) \Rightarrow\ B^{d_X}(x, \epsilon) \in \mathscr{O}$ da f stetig ist. Damit ist $O = \bigcup\limits_{x\in O} B^{d_X}(x, \epsilon) \in \mathscr{O}$
Sei nun $O \in \mathscr{O}$ und $x \in O$
Es ist $f(O)$ offen in Y, also $\exists\ \epsilon > 0:\ B^d(f(x), \epsilon) \subseteq f(O)$
$\Rightarrow\ B^{d_X}(x, \epsilon) = f^{-1}(B^d(f(x), \epsilon)) \subseteq O$, also ist $O \in \mathscr{O}(d_X)$ □

7 Der Satz von Arzelà-Ascoli

In diesem Kapitel betrachten wir den Raum

$$C(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig, beschränkt}\}$$

der stetigen und beschränkten Funktionen auf X.
Auf $C(X)$ definieren wir die Norm

$$||f|| := ||f||_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

damit wird $C(X)$ ein normierter Vektorraum.

Ziel: Charakterisierung der kompakten Teilmengen von $C(X)$ im Fall, dass X kompakt ist.

7.1 Der Beweis des Satzes

Zunächst benötigen wir einige Lemmata und Definitionen.

Lemma 7.1. *$(C(X), ||.||)$ ist ein Banachraum, d.h. $C(X)$ ist ein vollständiger, normierter Vektorraum.*

Beweis. Die Norm- und Vektorraumaxiome sind leicht nachzuprüfen. Wir zeigen nur noch die Vollständigkeit.
Sei also (f_n) eine Cauchyfolge in $C(X)$, dann existiert nach Lemma 5.11 eine stetige Funktion f mit $f_n \to f$ in $C(X)$.
Es bleibt nur noch zu zeigen, dass f beschränkt ist.
Sei dazu $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $||f - f_{n_0}|| < 1$ ist und sei C eine Schranke für $||f_{n_0}||$. Dann gilt

$$||f|| \leq ||f - f_n|| + ||f_n|| \leq 1 + C$$

□

Der wichtigste Begriff in diesem Kapitel ist der Folgende:

Definition 7.2. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq C(X)$. A heißt **gleichgradig stetig** (ggs)*

$$:\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } x : \ \forall y \in U \ \forall f \in A : \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Bemerkung: Alle $f \in A$ sind stetig $\Leftrightarrow$ $\forall f \in A \ \forall x \in X \ \forall \epsilon > 0 \ \exists$ Umgebung U von x: $\forall y \in U : \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$
Der Unterschied liegt also nur in der Stellung der Quantoren, U ist in 7.2 von ϵ und x abhängig, hier allerdings von f, ϵ und x

Wir wollen nun eine Vereinfachung dieser Definiton im Fall, dass X ein metrischer, kompakter Raum ist, angeben. Dazu benötigen wir zunächst die Existenz einer Lebesguezahl.

Lemma 7.3. *Sei (X, d) kompakt.*
*Dann existiert zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X eine **Lebesguezahl** δ, d.h. ein $\delta > 0$, so dass: $\forall x \in X \ \exists i \in I : \ B(x, \delta) \subseteq U_i$*

Beweis. Angenommen es existiert kein solches δ.
Dann gilt $\forall \delta > 0\ \exists x \in X: \ B(x,\delta) \cap (X \setminus U_i) \neq \emptyset, \ \forall i \in I$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} > 0\ \exists x_n \in X: \ B(x_n, \frac{1}{n}) \cap (X \setminus U_i) \neq \emptyset, \ \forall i \in I$
Da X folgenkompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{i(n)})$ ($i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend) von (x_n) und ein $x \in X$ mit $x_{i(n)} \to x$
Da U_i eine Überdeckung ist, existiert ein $i \in I: \ x \in U_i$
Wähle nun ein $\epsilon > 0$ mit $B(x,\epsilon) \subseteq U_i$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{i(n_0)} < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(x_{i(n_0)}, x) < \frac{\epsilon}{2}$
Dann ist $B(x_{i(n_0)}, \frac{1}{i(n_0)}) \subseteq B(x,\epsilon)$, denn:
Sei $y \in B(x_{i(n_0)}, \frac{1}{i(n_0)})$, dann gilt

$$d(y,x) \leq d(y, x_{i(n_0)}) + d(x_{i(n_0)}, x) \leq \frac{1}{i(n_0)} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Dann ist aber $B(x_{i(n_0)}, \frac{1}{i(n_0)}) \cap (X \setminus U_i) = \emptyset$, was ein Widerspruch ist und deshalb existiert δ □

Lemma 7.4. *Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gilt: $A \subseteq C(X)$ ist ggs*

$$\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ \forall f \in A \textit{ und } \forall x, y \in X \textit{ mit } d(x,y) < \delta: \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Beweis. zu " $\Leftarrow$ " : klar mit $U := B(x,\delta)$
zu " $\Rightarrow$ " : Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in X$ und zu $\frac{\epsilon}{2} > 0$ wähle U_x Umgebung von x mit $\forall f \in A, \ \forall y \in U_x: \ |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$
Nach dem vorherigen Lemma existiert nun ein $\delta > 0$, so dass $\forall y \in X$ ein $x \in X$ existiert mit $B(y,\delta) \subseteq U_x$
Sei nun $f \in A$ und $z, y \in X$ mit $d(z,y) < \delta \Rightarrow \exists x \in X: \ \{z,y\} \in U_x$. Dann gilt:

$$|f(z) - f(y)| \leq |f(z) - f(x)| + |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

□

<u>Bemerkung:</u> Für $A = \{f\}$ ist obiges Lemma gerade die Ausage, dass auf kompakten Mengen stetig und gleichmäßig stetig das Gleiche bedeutet!

Bevor wir den Satz von Arzelà-Ascoli beweisen können, brauchen wir noch das folgende Hilfslemma:

Lemma 7.5. *Sei (X,d) ein kompakter Raum. Dann existiert eine abzählbare Menge $D \subseteq X$ mit $\overline{D} = X$*

Beweis. Wegen der Kompaktheit von X gilt:
$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ A \subseteq X$ endlich: $\bigcup\limits_{x \in A} B(x,\epsilon) = X$
$\Rightarrow \forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ A_n \subseteq X$ endlich: $\bigcup\limits_{x \in A_n} B(x, \frac{1}{n}) = X$
Mit $D := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ folgt die Behauptung, denn sei $x \in X$ und U eine Umgebung von x
$\Rightarrow \ \exists\ n \in \mathbb{N}: \ B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$ und es existiert ein $y \in A_n \subseteq D: \ x \in B(y, \frac{1}{n})$
$\Rightarrow \ y \in B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U \Rightarrow y \in D \cap U \neq \emptyset$. Da U beliebig war $\Rightarrow x \in \overline{D}$
$\Rightarrow X \subseteq \overline{D} \Rightarrow$ Behauptung. □

Satz 7.6. *(von Arzelà-Ascoli)*
Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und $A \subseteq C(X)$. Dann gilt:

$$\overline{A} \textit{ kompakt } \Leftrightarrow \ A \textit{ gleichgradig stetig und bzgl } ||.|| \textit{ beschränkt}$$

Beweis. " $\Rightarrow$ ": Sei $\overline{A}$ kompakt $\Rightarrow \overline{A}$ ist beschränkt, denn die stetige Abbildung $||.|| : \overline{A} \to \mathbb{R}$ ist beschränkt nach (6.8).
$\Rightarrow$ A ist beschränkt.
Wir zeigen $\overline{A}$ ist gleichgradig stetig:
Angenommen dies gilt nicht, dann $\exists\ \epsilon$ und $\exists\ x \in X$, so dass $\forall n \in \mathbb{N}:\ \exists y_n \in B(x, \frac{1}{n})$ und ein $f_n \in \overline{A}$ mit $|f_n(x) - f_n(y_n)| > \epsilon$ (*)
Nach Wahl gilt $y_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ und da $\overline{A}$ ein kompakter, metrischer Raum ist, ist er auch folgenkompakt, also existiert eine Teilfolge $f_{i(n)}$ von f_n und ein $f \in \overline{A}$ mit $f_{i(n)} \overset{n\to\infty}{\to} f$ bzgl. $||.||$
Sei nun n_0 so gewählt, dass $\forall n \geq n_0$: $|f(x) - f(y_{i(n_0)})| < \frac{\epsilon}{3}$ (f stetig!) und $||f_{i(n_0)} - f|| < \frac{\epsilon}{3}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
|f_{i(n_0)}(x) - f_{i(n_0)}(y_{i(n_0)})| &\leq |f_{i(n_0)}(x) - f(x)| + |f(x) - f(y_{i(n_0)})| \\
&\quad + |f(y_{i(n_0)}) - f_{i(n_0)}(y_{i(n_0)})| \\
&\leq ||f_{i(n_0)} - f|| + |f(x) - f(y_{i(n_0)})| + ||f_{i(n_0)} - f|| \\
&\leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (*), also ist $\overline{A}$, und damit A, gleichgradig stetig.

zu " $\Leftarrow$: " Wir zeigen, dass $\overline{A}$ folgenkompakt ist. Dies ist ausreichend, da $\overline{A}$ metrisch ist. Der Beweis erfolgt in 4 Schritten:

1.Schritt: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{A}$. Dann kann man $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ wählen mit $||f_n - g_n|| \leq \frac{1}{n}$ (i.) und es genügt zu zeigen, dass g_n eine konvergente Teilfolge in $C(X)$ besitzt (ii.).
zu (i.): Sei $f_n \in \overline{A}$, dann ist nach Definition des Abschlusses $B(f_n, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, also folgt (i.)
zu (ii.): Wenn eine Teilfolge $(g_{i(n)})$ von (g_n) existiert und ein $g \in C(X)$ mit $g_{i(n)} \to g$ dann folgt

$$||f_{i(n)} - g|| \leq \underbrace{||f_{i(n)} - g_{i(n)}||}_{\leq \frac{1}{i(n)}} + ||g_{i(n)} - g|| \to 0$$

also konvergiert (f_n) gegen g und da $(g_n) \subseteq A$ muss das Grenzelement in $\overline{A}$ liegen.

2.Schritt: Wähle nun nach Lemma 7.5 ein $D \subseteq X$ mit $\overline{D} = X$ und sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von D.
Da A beschränkt ist $\Rightarrow \{g_n(x_1) | n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt und man kann nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfoge $(g_{\varphi_1(n)})(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ wählen. Das Grenzelement bezeichnen wir mit $g(x_1)$
Nun wählt man induktiv Teilfolgen: Sei $((g_{\varphi_i(n)}(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $g(x_i)$ dann ist $(g_{\varphi_i(n)}(x_{i+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und man kann eine Teilfolge $\varphi_{i+1}(n)$ von $\varphi_i(n)$ wählen, so dass $(g_{\varphi_{i+1}(n)}(x_{i+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Das Grenzelement nennen wir $g(x_{i+1})$.
Wir definieren $\varphi(n) := \varphi_n(n)$ (Diagonalfolge!). Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}:$

$$\lim_{n\to\infty} g_{\varphi(n)}(x_i) = g(x_i)$$

wie man leicht nachrechnet. (Diagonalfolgenprinzip)
Damit haben wir eine Teilfolge $(g_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert, die auf einer in X dichten Menge konvergiert und die gleichgradig stetig ist (klar, da A ggs ist)

3.Schritt: Wir zeigen: $(g_{\varphi(n)})$ ist eine Cauchyfolge bzgl. $||.||$
Sei also $\epsilon > 0$ vorgegeben.
$\overset{(7.4)}{\Rightarrow}\ \exists\ \delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta:\ |g_{\varphi(n)}(x) - g_{\varphi(n)}(y)| < \frac{\epsilon}{4}$
Sei $x \in X$. Da D dicht ist $\Rightarrow B(x,\delta) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow\ \exists\ y \in D:\ y \in B(x,\delta)$
$\Rightarrow x \in B(y,\delta) \Rightarrow\ X = \bigcup_{y\in D} B(y,\delta)$
da X kompakt ist $\Rightarrow\ \exists\ y_1, ..., y_k \in D:\ \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i,\delta) = X$
Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|g_{\varphi(n)}(y_i) - g_{\varphi(m)}(y_i)| < \frac{\epsilon}{4}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ und $\forall n, m \geq n_0$.

Das geht, da $(g_{\varphi(n)}(y_i))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle i eine Cauchyfolge darstellen und nur endlich viele i betrachtet werden (dies ist der entscheidende Punkt im Beweis)
Sei nun $x \in X \Rightarrow \exists\ i \in \{1, ..., k\}$: $d(x, y_i) \leq \delta \Rightarrow\ \forall m, n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}|g_{\varphi(n)}(x) - g_{\varphi(m)}(x)| &\leq |g_{\varphi(n)}(x) - g_{\varphi(n)}(y_i)| + |g_{\varphi(n)}(y_i) - g_{\varphi(m)}(y_i)| \\ &\quad + |g_{\varphi(m)}(y_i) - g_{\varphi(m)}(x)| \leq \frac{3\epsilon}{4}\end{aligned}$$

und n_0 ist unabhängig von x gewählt worden, also gilt:

$$||g_{\varphi(n)} - g_{\varphi(m)}|| = \sup_{x\in X} |g_{\varphi(n)}(x) - g_{\varphi(m)}(x)| < \epsilon\ \forall m, n \geq n_0$$

und $(g_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.
4.Schritt: Da $C(X)$ vollständig ist gilt nun, dass ein $g \in C(X)$ existiert mit $g_{\varphi(n)} \to g$
Damit ist der Satz von Arzelà- Ascoli bewiesen. □

7.2 Anwendungen des Satzes von Arzelà- Ascoli

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit zwei wichtigen Anwendungen beschäftigen. Wir werden die Existenz von Lösungen einfacher Differentialgleichungen zeigen (Satz von Peano), sowie den in der Funktionentheorie wichtigen Satz von Montel, der unter gewissen Voraussetzungen die Existenz kompakt konvergenter Teilfolgen von Folgen holomorpher Funktionen sichert, beweisen.

Der Satz von Peano: Dieser Satz sichert die Existenz von Lösungen einer Differentialgleichung der Form $y'(t) = f(t, y(t))$

Satz 7.7. *Sei $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann existiert für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ eine stetig diffbare Funktion $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned}&y(0) = y_0\\ &y'(t) = f(t, y(t))\ \forall t \in [0, 1]\end{aligned}$$

(eine Eindeutigkeitsaussage ergibt sich erst wenn f in der ersten Komponente Lipschitzstetig ist (Picard-Lindelöff))

Beweis. Es existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein stetiges $y_k : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ mit (*):

$$y_k(t) = \begin{cases} y_0 & \text{für } t \leq 0 \\ y_0 + \int\limits_0^t f(s, y_k(s - \frac{1}{k}))\ ds & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Denn:
Setze $y_k(t) := y_0$ für $t \leq 0$ und
$y_k(t) = y_0 + \int\limits_0^t f(s, y_0)\ ds$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{k}$, $y_k(t) = y_0 + \int\limits_0^t f(s, y_k(s - \frac{1}{k}))\ ds$ für $\frac{1}{k} \leq t \leq \frac{2}{k}$, u.s.w.
dann ist y_k nach endlich vielen Schritten definiert.
Da f beschränkt ist, existiert ein $C > 0$ mit $||f|| \leq C$ und damit
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} :\ ||y_k|| \leq |y_0| + C \cdot t \leq |y_0| + C$
$\Rightarrow$ die Folge $((y_k)_{|[0,1]})_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $(C([0, 1]), ||.||)$ und es gilt

$$|y_k(t) - y_k(t')| = \left|\int\limits_t^{t'} f(s, y_k(s - \frac{1}{k}))\ ds\right| \leq C|t - t'|$$

also ist die Menge $A := \{(y_k)_{|[0,1]} \mid k \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig und beschränkt.
Nach Arzelà-Ascoli ist $\overline{A}$ demnach kompakt, also existiert zu $(y_k)_{|[0,1]}$ eine in $(C([0,1]), ||.||)$ konvergente Teilfolge $(y_{i(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Der Grenzwert sei $y \in C([0,1])$
Man zeigt mit Standardargumenten aus der Analysis, dass
$f_n(s) := f(s, y_{i(n)}(s - \frac{1}{i(n)}))$ auf $(C([0,1]), ||.||)$, d.h. gleichmäßig, gegen $f(s, y(s))$ konvergiert.
Damit kann man in (*) wenn man n durch $i(n)$ ersetzt, den lim für $n \to \infty$ betrachten und lim mit dem Integral vertauschen. Es ergibt sich:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$$

und damit $y(0) = y_0$ und $y'(t) = f(t, y(t))$ □

Der Satz von Montel:
In diesem kurzen Ausflug in die Funktionentheorie werden einige Kenntnisse über komplexe Funktionentheorie vorausgesetzt.

Das stimmt noch nicht...ich zeige ja nur, dass eine auf K konvergente Teilfolge existiert! Die Teilfolge knnte ja auf jedem Kompaktum eine andere sein!!

Satz 7.8. *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : A \to \mathbb{C}$ mit $|f_n(z)| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in A$*
Dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge die auf jeder kompakten Teilmenge von A gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Sei $K \subseteq A$ kompakt, dann ist nur zu zeigen, dass $((f_n)_{|}K)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig und ist. (beschränkt ist die Menge nach Voraussetzung)
Sei zunächst $K = \overline{B(a,r)}$ wobei $\overline{B(a,2r)} \subseteq A$ sei und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben.
Seien $z, z' \in K$ mit $|z - z'| < \delta := \frac{r}{8C} \cdot \epsilon$, dann gilt mit der Cauchyschen Integralformel:

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z')| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=2r} \left(\frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-z'} \right) dw \right| \\ &= \frac{|z-z'|}{2\pi} \left| \int_{|w-a|=2r} \left(\frac{f(w)}{(w-z)(w-z')} \right) dw \right|\end{aligned}$$

Es ist aber $z, z' \in \overline{B(a,r)} \subseteq \overline{B(a, \frac{3}{2}r)}$ und damit $|w - z| = |(w-a) - (z-a)| \geq |w-a| - |z-a| \geq 2r - \frac{3}{2}r = \frac{1}{2}r$ und für z' genauso.
Also gilt für $z, z' \in \overline{B(a,r)}$ mit $|z - z'| < \delta$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq \frac{|z-z'|}{2\pi} \cdot \frac{4C}{r^2} \cdot 4\pi r \leq 8C\delta r = \epsilon$$

Sei nun $K \subseteq A$ kompakt und beliebig.
Sei $a \in K$, dann existiert, da A offen ist, ein $r > 0$ mit:
$\overline{B(a,2r)} \subseteq A$ und es gilt:

$$K \subseteq \bigcup_{a\in K} \overline{B(a, r_a)} \subseteq \bigcup_{a\in K} \overline{B(a, 2r_a)} \subseteq A$$

Da K kompakt ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(a_i, r_{a_i})}$ wobei $\overline{B(a_i, 2r_{a_i})} \subseteq A$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben, definiere $\delta := \min_{i=1,\dots,n}\{\min(\frac{r_{a_i}}{2}, \frac{r_{a_i}\epsilon}{8C})\}$

Seien dann $z, z' \in K$ mit $|z - z'| \leq \delta \Rightarrow \exists i \in \{1, ..., n\} : \ z, z' \in \overline{B(a_i, r_{a_i})}$ und damit $\forall n \in N : \ |f_n(z) - f_n(z')| \leq \epsilon$
Damit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ggs und es folgt die Behauptung. $\square$

8 Lokal kompakte Räume und die 1-Punkt-Kompaktifizierung

Wir wollen nun zeigen, dass gewisse Räume durch Hinzunahme eines Punktes zu kompakten Räumen gemacht werden können. Diese Räume müssen aber zumindest lokal kompakt sein.

Definition 8.1. *Seien X, Y topologische Räume $f : X \to Y$. f heißt* ***Einbettung*** *von X in Y $:\Leftrightarrow f : X \to f(X) \subseteq Y$ ist ein Homöomorphismus.*

Bemerkung: $f : X \to Y$ ist eine Einbettung $\Leftrightarrow f$ stetig (bzgl $\mathscr{O}_X - \mathscr{O}_Y$), f injektiv, $\forall U \in \mathscr{O}_X : f(U)$ offen in Spurtoplogie von $f(X)$

Eine Kompaktifizierung von X ist ein kompakter Raum Y und eine Einbettung $i : X \to Y$ mit $\overline{i(X)} = Y$

Definition 8.2. *X topologischer Raum*
X heißt ***lokal kompakt*** $\Leftrightarrow \forall x \in X\ \exists$ *Umgebungsbasis von x die aus kompakten Mengen besteht*
$\Leftrightarrow \forall x \in X\ \forall U \subseteq X$ *offen mit $x \in U$*
$\exists$ *kompakte Umgebung K von x mit $x \in K \subseteq U$*

Beispiel 8.3.

- $\mathbb{R}^n$ *ist lokal kompakt mit $\overline{B(x, \frac{1}{n})}$ als Umgebungsbasis von x*
- *Ein normierter VR $(V, ||.||)$ ist genau dann lokal kompakt, wenn* $\dim V < \infty$

Satz 8.4. *(1-Punkt-Kompaktifizierung)*
Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein lokal kompakter, nicht kompakter, Hausdorffraum und $x_\infty \notin X$.
Dann existiert genau eine Topologie $\mathscr{O}_{\hat{X}}$ auf $\hat{X} = X \cup \{x_\infty\}$, so dass $(\hat{X}, \mathscr{O}_{\hat{X}})$ kompakt, hausdorff und die Inklusion $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ Einbettung ist.
Es gilt dann $\overline{i(X)} = \hat{X}$ und $\mathscr{O}_{\hat{X}} = \mathscr{O}_X \cup \{\hat{X} \setminus K \mid K \subseteq X$ kompakt$\}$

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir einige wichtige Folgerungen, Anwendungen und Beispiele sehen.

Folgerung 8.5.

(i.) Da $\hat{X}$ hausdorffsch ist $\Rightarrow \{x_\infty\}$ ist abgeschlossen in $\hat{X}$ und damit ist $X = \hat{X} \setminus \{x_\infty\}$ offen.

(ii.) Seien $\widetilde{X}, \hat{X}$ kompakte Hausdorffräume und $j : X \to \widetilde{X}$ sowie $i : X \to \hat{X}$ Einbettungen mit $\#(\widetilde{X} \setminus j(X)) = \#(\hat{X} \setminus i(X)) = 1$.
Dann gilt $\widetilde{X}$ ist homöomorph zu $\hat{X}$

Insbesondere also gilt, dass wenn man einen kompakten Hausdorff-Raum $\widetilde{X}$ und eine Einbettung $j : X \to \widetilde{X}$ mit $\#(\widetilde{X} \setminus j(X)) = 1$ gefunden hat, dass dann $\widetilde{X}$ schon homöomorph zu $\hat{X}$ aus Satz 8.4 ist.

Beweis. zu (i.): ist klar

zu (ii.): Sei $\hat{X} = i(X) \cup \{\hat{x}_\infty\}$ und $\widetilde{X} = j(X) \cup \widetilde{x}_\infty$
Definiere

$$H : \hat{X} \longrightarrow \widetilde{X}$$
$$\hat{x} \longrightarrow \begin{cases} j \circ i^{-1}(\hat{x}) & \text{falls } \hat{x} \in i(X) \\ \widetilde{x}_\infty & \text{falls } \hat{x} = \hat{x}_\infty \end{cases}$$

sowie

$$\begin{aligned} G : \widetilde{X} &\longrightarrow \hat{X} \\ \widetilde{x} &\longrightarrow \begin{cases} i \circ j^{-1}(\widetilde{x}) & \text{falls } \widetilde{x} \in j(X) \\ \hat{x}_\infty & \text{falls } \widetilde{x} = \widetilde{x}_\infty \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist offensichtlich $H \circ G = id_{\widetilde{X}}$ und $G \circ H = id_{\hat{X}}$.
Die Stetigkeit von G und H folgt aus den Eigenschaften der Einbettungen und der Kompaktheit der Räume. □

8.1 Kompaktifizierung und Metrisierbarkeit von $\mathbb{R}^n$

Beispiel 8.6. *Sei $X = \mathbb{R}^n$, dann ist die 1-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^n. (Speziell ist also die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}$ gerade die S^2)*

Beweis. Wir benutzen Folgerung 8.5 (ii.)
$\widetilde{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x - e_{n+1}| = 1\}$, wobei $|.|$ die übliche euklidische Norm und $e_{n+1} = (0, ..., 0, 1)$ ist.
Also ist $\widetilde{S}^n$ die Einheitskugel um den Mittelpunkt e_{n+1}
Es sei $N := 2e_{n+1} \in \widetilde{S}^n$ der Nordpol dieser Kugel und $p : \widetilde{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$p(y) := \frac{2}{2 \cdot y_{n+1}} \cdot y - \frac{y_{n+1}}{2 \cdot y_{n+1}} \cdot N$$

Diese etwas kompliziert anmutende Definition ist lediglich die sogenannte stereographische Projektion, bei der das Bild eines Punktes y auf $\widetilde{S}^n \setminus \{N\}$ durch den Schnittpunkt von $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ mit der Geraden durch y und N gegeben wird.
Diese Abbildung ist stetig und durch $i : \mathbb{R}^n \to \widetilde{S}^n \setminus \{N\}$

$$i(x) := \frac{4}{|x| + 4} \cdot x + \frac{|x|^2}{|x|^2 + 4} \cdot N$$

wird eine stetige Umkehrabbildung gegben.
i als Abbildung nach $\widetilde{S}^n$ aufgefasst ist demnach eine Einbettung und $\widetilde{S}^n = i(\mathbb{R}^n) \cup \{N\}$, also folgt die Behauptung wegen $S^n \cong \widetilde{S}^n$ und Folgerung 8.5 □

Folgerung 8.7. *Die 1-Punkt-Kompaktifizierung $\hat{\mathbb{R}^n} =: \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ des $\mathbb{R}^n$ ist metrisierbar.*

Beweis. Sei $h : \hat{R^n} \to S^n$ ein Homöomorphismus.
Definiere $d(x, y) := d'(h(x), h(y))$ wobei d' die von $\mathbb{R}^{n+1}$ aud S^n induzierte (üblich) Metrik ist.
Da h Homöomorphismus ist folgt $\mathscr{O}_{\hat{\mathbb{R}^n}} = \mathscr{O}(d)$ nach Lemma 6.21 □

Wir wollen nun noch kurz einige Eigenschaften der 1-Punkt-Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ besprechen.

Lemma 8.8. *(i.) $\hat{\mathbb{R}^n}$ erfüllt das 1.Abzählbarkeitsaxiom.*

(ii.) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\hat{\mathbb{R}^n} =: \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Dann gilt $\lim x_n \to \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ |x_n| \geq K\ \forall n \geq n_0$

Beweis. (i.) ist klar, wegen der Metrisierbarkeit.
(ii.) folgt aus der Definition der Toplogie der 1-Punkt-Kompaktifizierung in (8.4) und der Charakterisierung von kompakten Mengen in $\mathbb{R}^n$ □

Man kann mittels der Kompaktifizierung Pole von Funktionen zu stetig fortsetzbaren Stellen machen:
Man sagt, dass eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ einen Pol in z_0 hat, wenn z_0 ein Häufungspunkt von U ist und wenn

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty :\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{N}\ \exists \delta : \forall z \in U,\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow\ |f(z)| \geq K$$

Nach Definition ist dies also genau dann der Fall wenn $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ in $\hat{C} =: \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Demnach gilt:

Lemma 8.9. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Pol von f.*
Dann ist
$\hat{f} : U \cup \{z_0\} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $\hat{f}_{|U} = f$ und $\hat{f}(z_0) := \infty$ stetig.

Dies findet Anwendung in der Theorie der meromorphen Funktionen.

8.2 Beweis von Satz 8.4

Beweis. zur Eindeutigkeit: Es sei $(\hat{X}, \mathscr{O}_{\hat{X}})$ ein kompakter Hausdorffraum mit $\hat{X} = X \cup \{x_\infty\}$ und die Inklusion $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ sei eine Einbettung, dann muss schon gelten, dass

$$\mathscr{O}_{\hat{X}} = \mathscr{O}_X \cup \{\hat{X} \setminus K \mid K \subseteq X \text{ kompakt}\}$$

ist.

zu " $\supseteq$ " : Da $\hat{X}$ hausdorffsch ist, muss nach (8.5) $X \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$ sein und da i eine Einbettung ist, gilt dann:
$\forall U \in \mathscr{O}_X : i(U)$ offen in $i(X) = X \subseteq \hat{X}$, d.h. es existiert ein $A \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$ mit $U = i(U) = X \cap A = X \cap (A \setminus \{x_\infty\})$
Da $X \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$ und $A \setminus \{x_\infty\} \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$ (da $\{x_\infty\}$ abgeschlossen in $\hat{X}$) folgt damit $U \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$
Sei nun $K \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow K = i(K) \subseteq \hat{X}$ kompakt (da i stetig) $\Rightarrow K \subseteq \hat{X}$ abgeschlossen (da $\hat{X}$ hausdorffsch) $\Rightarrow\ \hat{X} \setminus K \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$

zu " $\subseteq$ " : Sei $W \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$

1.Fall: $x_\infty \notin W \ \Rightarrow\ W = i^{-1}(W) \in \mathscr{O}_X$
(wegen der Stetigkeit von i)

2.Fall: $x_\infty \in W$. Wir zeigen, dass $K := \hat{X} \setminus W$ in X kompakt ist.
Sei also $(U_i)_{i \in I}$, $U_i \in \mathscr{O}_X$ eine Überdeckung von K. Nach " $\supseteq$ " wissen wir schon, dass die $U_i \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$ sind und die $(U_i)_{i \in I}$ zusammen mit W eine Überdeckung von $\hat{X}$ bilden.
Da $\hat{X}$ kompakt ist $\Rightarrow \exists J \subseteq I$ endlich $\hat{X} = \bigcup\limits_{i \in J} U_i \cup W \Rightarrow K \subseteq \bigcup\limits_{i \in J} U_i$
also ist $K \subseteq X$ kompakt.

Existenz: Wir definieren zu $\hat{X} := X \cup \{x_\infty\}$ das Mengensystem

$$\mathscr{O}_{\hat{X}} = \mathscr{O}_X \cup \{\hat{X} \setminus K \mid K \subseteq X \text{ kompakt}\}$$

und zeigen, dass dies eine Topologie darstellt (i.), $(\hat{X}, \mathscr{O}_{\hat{X}})$ hausdorffsch (ii.) und kompakt (iii.) ist und die Inklusion $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ eine Einbettung ist (vi.) mit $\overline{i(X)} = \hat{X}$ (v.)

zu (i.): Es ist $\emptyset \in \mathscr{O}_X$ und $\hat{X} = \hat{X} \setminus \emptyset$, $\emptyset \subseteq X$ kompakt.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ ein System von Mengen aus $\mathscr{O}_{\hat{X}}$, Z: $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$

1.Fall: $\forall i \in I: \ U_i \in \mathscr{O}_X \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathscr{O}_X$

2.Fall: Sei $J := \{i \in I \mid x_\infty \in U_i\} \neq \emptyset$. Nach Definition gilt $\forall i \in J \ \exists K_i \subseteq X$ kompakt mit $U_i = \hat{X} \setminus K_i$ und $\forall i \in I \setminus J: \ U_i \in \mathscr{O}_X$
Es ist $\hat{X} \setminus \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} \hat{X} \setminus U_i = \bigcap_{i\in J} K_i \cap \bigcap_{i\in I\setminus J} \underbrace{X \setminus U_i}_{\text{abg. in } X}$
Die K_i sind abgeschlossen in X, da X hausdorffsch ist und damit ist für ein $j \in J$: $\hat{X} \setminus \bigcup_{i\in I} U_i \subseteq K_j$ abgeschlossen in X und als Teil einer kompakten Menge, selbst kompakt.
$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i = \hat{X} \setminus \left(\hat{X} \setminus \bigcup_{i\in I} U_i\right) \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$

Seien nun $U, V \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$, Z: $U \cap V \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$
Sei $U = \hat{X} \setminus K_1$ und $V = \hat{X} \setminus K_2$ mit $K_1, K_2 \subseteq X$ kompakt. Dann gilt $U \cap V = \hat{X} \setminus (K_1 \cup K_2) \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$ da $K_1 \cup K_2$ kompakt ist.

Wenn $U \in \mathscr{O}_X$ und $V = \hat{X} \setminus K$ mit $K \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow \ U \cap V \overset{x_\infty \notin U}{=} U \cap X \setminus K \in \mathscr{O}_X \subseteq \mathscr{O}_{\hat{X}}$, da K in X abgeschlossen ist. (X hausdorffsch)

Damit ist (i.) gezeigt.

zu (ii.): Zeige $(\hat{X}, \mathscr{O}_{\hat{X}})$ ist hausdorffsch.
Seien $x \neq y \in \hat{X}$

1.Fall: $\{x, y\} \subseteq X$, dann folgt die Behauptung, da X hausdorffsch ist.

2.Fall: $x \in X$ und $y = x_\infty$
X ist lokal kompakt
$\Rightarrow \ \exists U \subseteq K \subseteq X$, U offene Umgebung von x, K kompakt
Mit $V := \hat{X} \setminus K \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$ gilt: $x \in U, \ y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$

zu (iii.) Zeige $(\hat{X}, \mathscr{O}_{\hat{X}})$ ist kompakt.
Sei $\hat{X} = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathscr{O}_{\hat{X}} \ \forall i \in I$

$\Rightarrow \exists k \in I: x_\infty \in U_k = \hat{X} \setminus K$ mit $K \subseteq X$ kompakt. Es ist $U_i' := U_i \setminus \{x_\infty\} \in \mathscr{O}_X$, da $U_i' \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$ wegen der Abgeschlossenheit von Punkten in Hausdorffräumen und der Definition von $\mathscr{O}_{\hat{X}}$
Weiter gilt: $K \subseteq \bigcup_{i\in I\setminus\{k\}} U_i'$

Da K kompakt ist $\exists J \subseteq I \setminus \{k\}$ endlich mit $K \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i' \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$ und damit $\hat{X} = U_k \cup \bigcup_{i\in J} U_i$

$\Rightarrow \ \hat{X}$ kompakt.

zu (vi.): Zeige $i: X \hookrightarrow \hat{X}$ ist eine Einbettung.
Offensichtlich ist $i: X \to i(X)$ bijektiv.
Sei $U \subseteq \hat{X}$ offen. Dann ist $U' := U \setminus \{x_\infty\} \in \mathscr{O}_X$ (siehe oben) und es gilt $i^{-1}(U) = U' \in \mathscr{O}_X$
Also ist i stetig bezüglich $\mathscr{O}_X - \mathscr{O}_{\hat{X}}$
Es bleibt noch zu zeigen, dass i offen ist, als Abbildung nach $i(X)$, also dass für $U \in \mathscr{O}_X$ gilt: $i(U)$ ist offen in der Spurtopologie $(\mathscr{O}_{\hat{X}})_{i(X)}$ von $i(X)$
Es ist aber $i(U) = U = U \cap i(X)$ und $U \in \mathscr{O}_X \subseteq \mathscr{O}_{\hat{X}}$, also folgt die Behauptung.
Nach Bemerkung bei Definition 8.1 folgt, dass i eine Einbettung ist.

zu (v.): Zeige $\overline{i(X)} = \hat{X}$
Sei U eine in $\hat{X}$ offene Umgebung von x_∞, also $U = \hat{X} \setminus K$ mit $K \subseteq X$ kompakt. Dann gilt $U \cap i(X) \neq \emptyset$, denn sonst wäre $X = K$ und X kompakt.
Damit ist $x_\infty \in \overline{i(X)}$ und damit auch $\hat{X} \subseteq \overline{i(X)}$, da X trivialerweise drin liegt. $\square$

8.3 Eigentliche Abbildungen

Wir wollen nun die stetigen Abbildungen zwischen zwei 1-Punkt-kompaktifizierten Räumen charakterisieren. Wie sich herausstellt sind dies gerade die sogenannten eigentlichen Abbildungen.

Definition 8.10. *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*
f heißt eigentlich $:\Leftrightarrow$ f ist stetig und für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq Y$ gilt: $f^{-1}(K) \subseteq X$ ist kompakt.

Beispiel 8.11. *(i.) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eigentlich*
$\Leftrightarrow$ f stetig und für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = \infty$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_k)| = \infty$

(ii.) $i : (0,1) \to \mathbb{R}$ die Inklusion ist nicht eigentlich, da $i^{-1}([0,1]) = (0,1)$ nicht kompakt in $(0,1)$

(iii.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $f(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t)$ ist nicht eigentlich, wegen (i.) ($x_k := -k$), bzw. wegen $f^{-1}(\overline{B(0,1)}) = (-\infty, 0]$

Satz 8.12. *Seien X, Y lokal kompakte, nicht kompakte Hausdorffräume und $f : X \to Y$.*
Sei $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ definiert durch $\hat{f}_{|X} = f$ und $f(x_\infty) = y_\infty$. Dann gilt:

$$\hat{f} \text{ stetig} \Leftrightarrow f \text{ eigentlich}$$

Beweis. " $\Rightarrow$ " : Sei $K \subseteq Y$ kompakt $\Rightarrow U := \hat{Y} \setminus K \in \mathscr{O}_{\hat{Y}} \Rightarrow \hat{f}^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{\hat{X}} \setminus \mathscr{O}_X \Rightarrow \exists K' \subseteq X$ kompakt: $\hat{f}^{-1}(U) = \hat{X} \setminus K'$
Da $\hat{f}^{-1}(U) = \hat{X} \setminus f^{-1}(K) \Rightarrow K' = f^{-1}(K)$ kompakt
$f = \hat{f}_{|X}$ ist stetig, da $\hat{f}$ stetig.

" $\Leftarrow$ " : Sei f eigentlich und $U \in \mathscr{O}_{\hat{Y}}$

1.Fall: $U \subseteq Y \Rightarrow U \in \mathscr{O}_Y \Rightarrow \hat{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X \subseteq \mathscr{O}_{\hat{X}}$ da f stetig ist.

2.Fall: $y_\infty \in U \Rightarrow \hat{Y} \setminus U =: K$ kompakt und $K \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(K) =: K'$ kompakt in X und $f^{-1}(K) = \hat{f}^{-1}(\hat{Y} \setminus U) = \hat{X} \setminus \hat{f}^{-1}(U) \Rightarrow \hat{f}^{-1}(U) = \hat{X} \setminus K' \in \mathscr{O}_{\hat{X}}$
$\Rightarrow \hat{f}$ stetig. □

Satz 8.13. *Seien X, Y lokal kompakte Hausdorffräume, $f : X \to Y$ eigentlich. Dann gilt:*

(i.) $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen

(ii.) Ist f zusätzlich bijektiv $\Rightarrow f$ ist Homöomorphismus

Beweis. zu (i.): (a.) Wenn X kompakt ist, ist A kompakt und damit auch $f(A)$. Da Y hausdorffsch ist folgt die Behauptung.
(b.) Sei nun X nicht kompakt $\Rightarrow$ Y nicht kompakt, da f eigentlich ($X = f^{-1}(Y)$)
Nach vorherigem Satz ist $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ stetig.
Sei nun $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow A \cup \{x_\infty\} \subseteq \hat{X}$ abgeschlossen
Nach (a.) gilt $\hat{f}(A \cup \{x_\infty\}) = f(A) \cup \{y_\infty\}$ ist abgeschlossen in $\hat{Y}$
$Y \setminus f(A) = \hat{Y} \setminus (f(A) \cup \{y_\infty\}) \in \mathscr{O}_{\hat{Y}}$ und $y_\infty \notin Y \setminus f(A) \Rightarrow Y \setminus f(A) \in \mathscr{O}_Y \Rightarrow f(A)$ abgeschlossen.

zu (ii.): Nach (i.) ist f offen, denn es ist für $U \in \mathscr{O}_X$ wegen der Bijektivität:

$$f(U) = f(X \setminus (X \setminus U)) \overset{f \text{ inj, surj}}{=} Y \setminus f(X \setminus U)$$

Dies ist offen in Y, da $X \setminus U$ abgeschlossen in X und damit $f(X \setminus U)$ abgeschlossen in Y
Also ist f ein Homöomorphismus. □

Wir wollen nun noch eine schöne Eigenschaft eigentlicher Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$ zeigen.

Satz 8.14. *Sei $n \geq 2$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eigentlich. Dann ist f nach unten oder nach oben beschränkt.*
Im 1.Fall existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}^n : \; f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$
Im 2.Fall existiert ein $x_1 \in \mathbb{R}^n : \; f(x_1) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$

Beweis. $K := f^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt, da f eigentlich.
$\Rightarrow \;\exists R > 0 : \; K \subseteq B(0, R)$
Da $n > 1 \;\Rightarrow\; \mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$ ist wegzusammenhängend $\Rightarrow f(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R))$ ist zusammenhängend und $0 \notin f(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R))$, also ist $f(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R))$ ein Intervall, das die 0 nicht enthält.
Also ist $f(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R)) \subseteq (0, \infty)$ oder $f(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R)) \subseteq (-\infty, 0)$
Es ist $\overline{B(0, R)}$ kompakt $\Rightarrow f(\overline{B(0, R)})$ beschränkt (da wieder kompakt)
$\Rightarrow f(\mathbb{R}^n) \subseteq (0, \infty) \cup f(\overline{B(0, R)})$ oder $f(\mathbb{R}^n) \subseteq (-\infty, 0) \cup f(\overline{B(0, R)})$
$\Rightarrow f$ ist nach unten oder oben beschränkt.
Da $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend und abgeschlossen ist, ist $f(\mathbb{R}^n)$ ein abgeschlossenes Intervall (nach Satz 8.13) das nicht kompakt ist (sonst müsste $\mathbb{R}^n$ kompakt sein, da f eigentlich ist)
$\Rightarrow f(\mathbb{R}^n) = [a, \infty)$ oder $f(\mathbb{R}^n) = (-\infty, b]$ □

Beispiel 8.15. *(i.) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist eigentlich und damit gilt die Aussage des Satzes.*

(ii.) Ein Beispiel, dass die Voraussetzung $n > 1$ nötig ist, ist die Abbildung: $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die eigentlich ist, für die aber die Aussage des Satzes offensichtlich nicht gilt.

8.4 2 Punkt Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$

Während die 1 Punkt Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ homöomorph zur S^1 wird, ist es auch möglich zwei Punkte $\pm\infty$ zu $\mathbb{R}$ hinzuzufügen, $\overline{R} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Man definiert dann eine Topologie indem man zu den offenen Mengen in $\mathbb{R}$ die Mengen $\overline{\mathbb{R}} \setminus (\{x \in \mathbb{R} | x \leq a\} \cup \{-\infty\})$ und $\overline{\mathbb{R}} \setminus (\{x \in \mathbb{R} | x \geq a\} \cup \{\infty\})$ für beliebige a hinzunimmt, die dann gerade die offenen Umgebungen von ∞ bzw. $-\infty$ werden.
$\overline{\mathbb{R}}$ wird dann homöomorph zu $[0, 1]$ und ist damit metrisierbar.
Mit der so definierten Topologie entsprechen Konvergenzen gegen $\infty, -\infty$ gerade den üblichen Definitionen.

9 Satz von Tychonoff

In diesem Kapitel werden wir den Satz von Tychonoff beweisen

Satz 9.1. *Sei I eine beliebige Menge und für alle $i \in I$ sei X_i ein kompakter topologischer Raum. Dann ist $X := \prod\limits_{i\in I} X_i$ (mit der Produkttopologie) kompakt.*

Bevor wir den Satz beweisen, wollen wir einige Anwendungen sehen

9.1 Anwendungen des Satzes von Tychonoff

(i.) Ein kompakter, nicht folgenkompakter Raum

Sei $\forall x \in \mathbb{R}: \ I_x := [0,1]$
Dann ist $\prod\limits_{x\in\mathbb{R}} I_x = [0,1]^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to [0,1]\}$ kompakt und es gilt $(f_n) \to f$ in Produkttopologie $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \ f_n(x) \to f(x)$ in $\mathbb{R}$ (nach Definition der Produkttopologie)
Wir haben schon in Abschnitt 3 gesehen, dass $[0,1]^{\mathbb{R}}$ nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, nun zeigen wir, dass $[0,1]^{\mathbb{R}}$ auch nicht folgenkompakt ist.
Jedes $x \in [0,1)$ besitzt eine eindeutige Dualdarstellung $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$ mit $x_k \in \{0,1\}$, wenn man fordert, dass die x_k **nicht** alle 1 werden ab einem k_0
Definiere $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ durch $f_n(x) = \begin{cases} x_n & x \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Angenommen es existiert ein $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend und $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere in $[0,1]^{\mathbb{R}}$ (also punktweise) gegen $f \in [0,1]^{\mathbb{R}}$
Definiere $x := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$ durch $x_k(x) = \begin{cases} 0 & k \in \mathbb{N} \setminus \varphi(2\mathbb{N}) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$, dann gilt aber $f_{\varphi(n)}(x) = x_{\varphi(n)}$ konvergiert nicht, da es eine alternierende Folge ist.

(ii.) Ein Exkurs in die Funktionalanalysis

Es sei $(V, ||.||)$ ein normierter Vektorraum und $V' := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ linear und stetig}\}$ der zugehörige Dualraum.
Durch $||f|| := \sup\limits_{||x||=1} |f(x)|$ wird eine Norm auf V' definiert und $(V', ||.||)$ wird zu einem Banachraum.

Problem: Der abgeschlossene Ball $B' := \{f \in V' \mid ||f|| \leq 1\}$ ist i.a. nicht kompakt bezüglich der üblichen, von $||.||$ auf V' induzierten Topologie.

Idee: Man definiert eine neue Topologie, die sogenannte ***-schwache Topologie**, auf V' bezüglich der B' kompakt ist.
Definiere zu den Abbildungen $\hat{x} : V' \to \mathbb{R}, \ \hat{x}(f) := f(x)$ das Mengensystem

$$\mathscr{B} := \{\hat{x}_1^{-1}(U_1) \cap ... \cap \hat{x}_k^{-1}(U_k) \mid k \in \mathbb{N}, \ x_1, ..., x_k \in V, \ U_1, ..., U_k \subseteq \mathbb{R} \text{ offen}\}$$

Dieses erfüllt die Voraussetzungen aus Satz 2.10 und es existiert demnach genau eine Topologie $\mathscr{O}^*$ auf V', die $\mathscr{B}$ als Basis hat. Diese Toplogie nennt man die ***-schwache Topologie** Dies ist gerade sie gröbste Topologie bezüglich der $\forall x \in V$ die Abbildungen $\hat{x} : V' \to \mathbb{R}$ stetig sind

Es gilt nun: Bezüglich $\mathscr{O}^*$ ist B' kompakt
Wir wollen dies beweisen:
Zu $x \in V$ sei $I_x := [-||x||, ||x||] \subseteq \mathbb{R}$ und $Y := \prod\limits_{x\in V} I_x$

Definiere $h : B' \to Y$ durch $h(f) := (f(x))_{x \in V}$ Wir wollen zeigen, dass dies ein Homöomorphismus bezüglich $\mathscr{O}^*$ in B' und der Produkttoplogie in Y ist.
Diese Abbildung ist mengentheoretisch also gerade die Inklusion (Achtung es gelten aber verschiedene Topologien), denn es ist $B' \subseteq Y$, da $||f(x)|| \leq ||f|| \cdot ||x|| \leq ||x||$ nach Definition der Norm.
Da außerdem $p_x \circ h = \hat{x}$ ist und $\hat{x}$ stetig ist bezüglich $\mathscr{O}^*$, folgt die Stetigkeit von h.
Offensichtlich ist auch die Injektivität von h, weil h lediglich die Inklusion ist. Also gilt, dass $h : B' \to h(B')$ bijektiv und stetig ist. Wir müssen noch zeigen, dass $h : B' \to h(B')$ offen ist. Es reicht dies für Subbasismengen von $(\mathscr{O}^*)_{B'}$ zu zeigen, da f injektiv ist (siehe Folgerung 3.7), wobei $\{\hat{x}^{-1}(U) \cap B' \mid x \in V, U \subseteq \mathbb{R} \text{ offen}\}$ eine solche Subbasis ist.
Sei also $x \in V$ und $U \subseteq \mathbb{R}$, dann ist $h(\hat{x}^{-1}(U) \cap B') = \prod_{y \in V} V_y$ wobei $V_x := U \cap [-||x||, ||x||]$ und $V_y := [0,1], \ \forall y \neq x$
Also ist $h(\hat{x}^{-1}(U) \cap B')$ offen in der Spurtopologie von $h(B')$ und h ist ein Homöomorphismus.

Wir müssen nun nur noch zeigen, dass $h(B')$ in Y abgeschlossen ist, denn dann folgt, dass $h(B')$ kompakt in Y ist (Y kompakt) und aus der Homöomorphismus Eigenschaft folgt dann die Kompaktheit von B'.
Sei also $y \in \overline{h(B')} \subseteq Y$ und definiere $f_0 : V \to \mathbb{R}$ durch $f_0(x) = y(x)$
Wenn nun $f_0 \in B'$ ist, dann ist trivialerweise $h(f_0) = y$ und $y \in h(B')$ und die Behauptung ist gezeigt.
$\not{Z}: \ f_0 \in B'$

Es ist noch nicht klar ob f_0 überhaupt in V' liegt, da nur $y \in Y$. Es ist also zunächst die Linearität zu zeigen. Sei $f \in B'$, dann gilt $\forall x_1, x_2 \in V: \ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
$\Rightarrow \ p_{x_1} \circ h(f) + p_{x_2} \circ h(f) = p_{x_1+x_2} \circ h(f) \Rightarrow (p_{x_1})_{|h(B')} + (p_{x_2})_{|h(B')} = (p_{x_1+x_2})_{|h(B')}$
Und wegen Satz 5.7 $\Rightarrow (p_{x_1})_{|\overline{h(B')}} + (p_{x_2})_{|\overline{h(B')}} = (p_{x_1+x_2})_{|\overline{h(B')}}$
Damit gilt für $y \in \overline{h(B')}: \ y(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2)$ und damit auch für f_0
Analog folgt die Homogenität $f_0(\alpha x) = \alpha f_0(x)$
$\forall x \in V$ gilt $f_0(x) = y_x \in [-||x||, ||x||]$ also ist $f_0(x) \leq ||x||$ und damit nach Definition: $||f_0|| \leq 1$
Es gilt allgemein, dass lineare und beschränkte Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$ stetig sind.
$\Rightarrow f_0 \in B'$

9.2 Etwas Filtertheorie und der Beweis des Satzes von Tychonoff

Nun wollen wir den Satz von Tychonoff beweisen. Dazu werden wir zunächst zeigen, dass jede endliche Teilüberdeckung von Mengen aus dem Mengensystem

$$\mathscr{S} := \{p_i^{-1}(U_i) \mid i \in I, \ U_i \subseteq X_i \text{ offen}\}$$

welches offensichtlich eine Subbasis der Produkttopologie darstellt, eine endliche Teilüberdeckung besitzt und dann, mittels ein wenig Filtertheorie, zeigen, dass dies schon ausreicht um die Kompaktheit zu erhalten.

Lemma 9.2. *Sei* $X = \prod_{i \in I} X_i$ *und* $p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j, \ p_j(x) = x_j$ *wie üblich die Projektion.*
Seien $j, i_1, ..., i_n \in I$, $x_j \in X_j$ *und* $U_{i_1} \subseteq X_{i_1}, ...U_{i_n} \subseteq X_{i_n}$ *und* $p_j^{-1}(x_j) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subsetneq X$
Dann existiert ein $k \in \{1, ..., n\}$ *mit* $j = i_k$ *und* $x_j \in U_{i_k} = U_j$

Beweis. o.E. seien alle $i_k, \ k = 1, ...n$ verschieden, sonst nur die verschiedenen nehmen und die Vereingung der U_{i_k}

Da $p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \neq X \Rightarrow U_{i_k} \subsetneq X_{i_k} \Rightarrow \exists y_{i_k} \in X_{i_k} \setminus U_{i_k}$
Falls $j \notin \{i_1, ..., i_n\}$ definiere $z \in X$ durch $z_{i_k} = y_{i_k},\ k = 1, ..., n,\ z_j = x_j$ und sonst beliebig $\Rightarrow$ $z \in p_j^{-1}(x_j)$ aber $z \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ was ein Widerspruch ist.
Demnach existiert ein $\hat{k}$ mit $j = i_{\hat{k}}$
Definiere $z \in X$ durch $z_{i_k} = y_{i_k},\ k \in \{1, ..., n\} \setminus \{\hat{k}\},\ z_j = x_j$ und sonst beliebig.
$\Rightarrow z \in p_j^{-1}(x_j)$ und $z \notin \bigcup\limits_{k=1,\ k\neq\hat{k}}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \Rightarrow z \in p_{j_{\hat{k}}}^{-1}(U_{i_{\hat{k}}}) = p_j^{-1}(U_j)$
$\Rightarrow\ x_j = p_j(z) \in U_j = U_{i_{\hat{k}}}$ □

Lemma 9.3. *Seien X, X_i wie oben. Sei $\mathscr{U} \subsetneq \mathscr{S}$ eine Überdeckung von X. Dann existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{V_1, ..V_n\} \subseteq \mathscr{U}$ mit $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i = X$*

Beweis. Angenommen dies gilt nicht (Annahme (+)), dann gilt $\forall i \in I\ \exists x_i \in X_i:\ p_i^{-1}(x_i)$ ist **nicht** durch endlich viele Elemente von $\mathscr{U}$ überdeckbar (Aussage (*)), denn sonst $\exists i \in I: \forall x_i \in X_i:\ p_i(x_i)$ ist durch endlich viele Elemente von $\mathscr{U}$ überdeckbar.
Nach Lemma 9.2 und wegen (+) $\exists i \in I\ \forall x_i \in X_i\ \exists U_{x_i} \subseteq X_i$ offen mit $x_i \in U_{x_i}$ und $p_i^{-1}(U_{x_i}) \in \mathscr{U}$
Da X_i kompakt ist $\Rightarrow \exists x_{i_1}, ..., x_{i_n} \in X_i:\ \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{x_{i_k}} = X_i,\ p_i^{-1}(U_{x_{i_k}}) \in \mathscr{U}$
$\Rightarrow X = p_i^{-1}(X_i) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \underbrace{p_i^{-1}(U_{x_{i_k}})}_{\in\mathscr{U}}$
Dies ist ein Widerspruch zu (+), also gilt (*)
Sei nun $x \in X,\ x = (x_j)_{j\in I}$ mit x_i aus (*) $\Rightarrow \exists U \in \mathscr{U}:\ \ x \in U \Rightarrow \exists i_o \in I,\ U_{i_0} \subseteq X_{i_0}$ offen $U = p_{i_0}^{-1}(U_{i_0})\ \Rightarrow\ x_{i_0} \in U_{i_0} \Rightarrow\ p_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) \subseteq U \in \mathscr{U}$ was ein Widerspruch zur Wahl von x_{i_0} ist. □

Folgendes Lemma beweist den Satz von Tychonoff:

Lemma 9.4. *Sei $(X, \mathscr{O})$ topologischer Raum, $\mathscr{S}$ eine Subbasis von $(X, \mathscr{O})$ und es existiere zu jeder Überdeckung $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{S}$ aus Subbasiselementen eine endliche Teilüberdeckung.*
Dann ist X kompakt.

Folgerung 9.5. *9.3+9.4 $\Rightarrow$ 9.1*

Für den Beweis dieses Lemmas müssen wir uns zunächst ein wenig mit der Filtertheorie beschäftigen.

Definition 9.6. *Sei X eine Menge $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$. $\mathscr{F}$ heißt **Filter** :⇔*

(i.) $F_1, F_2 \in \mathscr{F}\ \Rightarrow\ F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$

(ii.) $F \in \mathscr{F},\ F \subseteq F' \subseteq X \Rightarrow F' \in \mathscr{F}$

(iii.) $\emptyset \notin \mathscr{F}$

Beispiel 9.7. *X topologischer Raum $x \in X \Rightarrow \mathscr{U}_x := \{U \subseteq X \mid U$ Umgebung von $x\}$ ist ein Filter, der sogenannte **Umgebungsfilter von** x*

Definition 9.8. *Sei $(X, \mathscr{O})$ topologischer Raum. $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ein Filter, $x \in X$. Man sagt $\mathscr{F}$ **konvergiert gegen** x :⇔ $\mathscr{U}_x \subseteq \mathscr{F}$*

Bemerkung: Ist X hausdorffsch $\Rightarrow$ Falls $\mathscr{F}$ konvergiert, so ist der Grenzwert eindeutig.

Beweis. Angenommen $\mathscr{F}$ konvergiert gegen x und y mit $x \neq y$, dann ist $\mathscr{U}_x \cup \mathscr{U}_y \subseteq \mathscr{F}$ und es existieren offene disjunkte Umgebungen $U \in \mathscr{U}_x, V \in \mathscr{U}_y$ von x bzw. y
Nach (i.) in Definition 9.6 $\Rightarrow \emptyset = U \cap V \in \mathscr{F}$ was ein Widerspruch zu (iii.) in Definition 9.6 ist. □

Definition 9.9. *Sei X eine Menge $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ein Filter.*
$\mathscr{F}$ heißt ***Ultrafilter*** *:$\Leftrightarrow$ Es existiert kein Filter $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{P}(X)$ mit $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{F}'$*

Wir benötigen den Satz, dass zu jdem Filter $\mathscr{F}$ ein diesen enthaltenden Ultrafilter $\mathscr{F}'$ existiert. Dies ist eine leichte Folgerung aus dem Lemma von Zorn, welches hier zitiert werden soll

Lemma 9.10. *(von Zorn) Sei $(\mathscr{X}, <)$ eine halbgeordnete Menge in der jede Kette (d.h. jede totoal geordnete Teilmenge) ein maximales Element in $\mathscr{X}$ besitzt (d.h. ein Element $x \in \mathscr{X}$ mit $y \leq x,\ \forall y \in$ Kette). Dann existiert ein maximales Element von $\mathscr{X}$.*

Folgerung 9.11. *Zu jedem Filter $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ existiert ein Ultrafilter $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{P}(X)$ mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$*

Beweis. Wähle $\mathscr{X} := \{\mathscr{G} \supseteq \mathscr{F} \mid \mathscr{G}$ ist Filter auf $X\}$ mit Halbordnung " $\subseteq$ "
Jede Kette K in $\mathscr{X}$ hat das maximale Element $\bigcup K \in \mathscr{X}$, also hat $\mathscr{X}$ ein maximales Element . Dieses ist automatisch ein Ultrafilter, weil sonst direkt ein Widerspruch zur Maximalität entsteht. $\square$

Lemma 9.12. *Sei $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ein Ultrafilter, $A \subseteq X$. Dann gilt entweder $A \in \mathscr{F}$ oder $(X \backslash A) \in \mathscr{F}$*

Beweis. 1.Fall: $\exists B \in \mathscr{F}:\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow\ B \subseteq X \setminus A\ \Rightarrow X \setminus A \in \mathscr{F}$

2.Fall: $\forall B \in \mathscr{F}:\ A \cap B \neq \emptyset$
$\Rightarrow \mathscr{F}' := \{B' \mid \exists B \in \mathscr{F}:\ A \cap B \subseteq B'\}$ ist ein Filter (klar!) und $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}' \Rightarrow \mathscr{F} = \mathscr{F}'$, da $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter ist.
Da $A \in \mathscr{F}'$ folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 9.13. *Sei X ein topologischer Raum und jeder Ultrafilter auf X sei konvergent. Dann ist X kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_i \mid i \in I\} =: \mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von X.
Angenommen es existiert keine endliche Teilüberdeckung, dann ist

$$\mathscr{F} := \{A \subseteq X \mid \exists\ E \subseteq I \text{ endlich } : (X \setminus \bigcup_{i \in E} U_i) \subseteq A\}$$

ein Filter.
Die Eigenschaften (ii.) und (iii.) sind klar, seien also $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ und E_1, E_2 die zugehörigen Teilmengen von I mit $X \setminus \bigcup_{i \in E_j} U_i \subseteq A_j,\ j = 1, 2$, dann gilt $X \setminus \bigcup_{i \in E_1 \cup E_2} U_i \subseteq A_1 \cap A_2 \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}$
Es existiert also ein Ultrafilter $\mathscr{F}'$ auf X mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$
Nach Voraussetzung $\exists x \in X:\ \mathscr{U}_x \subseteq \mathscr{F}'$ und da $\mathscr{U}$ eine Überdeckung ist $\exists i \in I:\ x \in U_i$ $\Rightarrow\ U_i \in \mathscr{F}'$
Definiere $E = \{i\}$, dann gilt $X \setminus \bigcup_{i \in E} U_i = X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_i \Rightarrow X \setminus U_i \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$
$\Rightarrow\ \emptyset = U_i \cap (X \setminus U_i) \in \mathscr{F}'$ was ein Widerspruch ist.
Damit war die Annahme falsch, es existiert also eine endliche Teilüberdeckung und X ist kompakt. $\square$

Nun können wir Lemma 9.4 beweisen

Beweis. (von Lemma 9.4) Angenommen es existiert ein Ultrafilter $\mathscr{F}$ auf X der nicht konvergiert
$\Rightarrow\ \forall x \in X$ gilt $\mathscr{U}_x \cap (\mathscr{P}(X) \setminus \mathscr{F}) \neq \emptyset$
$\Rightarrow\ \forall x \in X\ \exists U \in \mathscr{U}_x \setminus \mathscr{F} \Rightarrow \exists n \in N$ und $S_1, ..., S_n \in \mathscr{S}$ mit $x \in S_1 \cap ... \cap S_n \subseteq U$
$\Rightarrow\ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \notin \mathscr{F}$ sonst wäre $U \in \mathscr{F}$ als Obermenge.
$\Rightarrow \exists i \in \{1, ..., n\}:\ S_i \notin \mathscr{F}$ sonst wäre der Schnitt auch in $\mathscr{F}$
Insgesamt gilt also, dass $\forall x \in X\ \exists S_x \in \mathscr{S}:\ x \in S_x \notin \mathscr{F}$

$\Rightarrow \; X = \bigcup\limits_{x \in X} S_x$

Diese Überdeckung aus Subbasiselementen besitzt aber nach Voraussetung eine endliche Teilüberdeckung, d.h. $\exists m \in \mathbb{N}$ und $x_1, ...x_m \in X: \; X = \bigcup\limits_{k=1}^{m} S_{x_k}$ und $S_{x_k} \notin \mathscr{F} \; \forall k \in \{1, ..., m\}$

Nach Lemma 9.12 $\Rightarrow X \setminus S_{x_k} \in \mathscr{F}, \; \forall k \in \{1, ..., m\}$

$\Rightarrow \; \emptyset = \bigcap\limits_{k=1}^{m} X \setminus S_{x_k} \in \mathscr{F}$ was ein Widerspruch zur Filterdefinition ist.

Also konvergieren alle Ultrafilter und damit ist X kompakt nach Lemma 9.13 $\square$

Algebraische Topologie

In den folgenden 5 Abschnitten wollen wir uns mit dem Gebiet der algebraischen Topologie beschäftigen und die wichtigsten Strukturen und Konstruktionen kennenlernen.

10 Die Quotiententopologie

Wir wollen kurz an die Definition einer Äquivalenzrelation erinnern:

Definition 10.1. *Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$*
*R heißt **Äquivalenzrelation** $:\Leftrightarrow$*

(i.) $\forall x \in X: \ (x,x) \in R$ *(Reflexivität)*

(ii.) $\forall x,y \in X: \ (x,y) \in R \Rightarrow \ (y,x) \in R$ *(Symmetrie)*

(iii.) $\forall x,y,z \in X: \ (x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow \ (x,z) \in R$ *(Transitivität)*

$$[x] := \{y \in X \mid (x,y) \in R\} \subseteq X$$

*heißt die **Äquivalenzklasse** von x und ihre Elemente heißen Repräsentanten.*

$$X/_\sim = X/_R := \{[x] \mid x \in X\}$$

ist die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\pi : X \to X/_R, \ \pi(x) = [x]$$

*die **Projektionsabbildung**.*

Bemerkung: Man schreibt $x \sim_R y \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow (x,y) \in R$ oder nur $x \sim y$ wenn es klar ist um welche Relation es sich handelt.

Folgerung 10.2. *Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X, dann sind zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt und X ist die Vereinigung der disjunkten Äquivalenzklassen.*

Ist andererseits $(A_i)_{i \in I}$ eine Zerlegung von X in disjunkte Mengen, dann definiert $x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in I: \ x,y \in A_i$ eine Äquivalenzrelation auf X und die A_i sind genau die auftretenden Äquivalenzklassen.

Definition 10.3. *Seien X, Y Mengen, R eine Äquivalenzrelation auf X und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Wenn gilt, dass $f(x) = f(y)$ $\forall x,y \in X$ mit $x \sim y$ (man sagt f ist verträglich mit $\sim$), dann ist die Abbildung*

$$\overline{f} : X/_R \to Y, \ \overline{f}([x]) := f(x)$$

wohldefiniert.
*Mann nennt $\overline{f}$ die von $\sim$ **induzierte Abbildung**. Es ist $\overline{f} \circ \pi = f$*

Beispiel 10.4. *Lemma 4.14 in Verbindung mit Folgerung 10.2 besagt, dass Z, Z_w Äquivalenzrelationen $\sim$, $\sim_w$ induzieren vermöge:*
$x \sim y \ \Leftrightarrow \ Z(x) = Z(y) \ \Leftrightarrow \ \exists \ A \subseteq X$ *zusammenhängend:* $x,y \in A$
$x \sim_w y \ \Leftrightarrow \ Z_w(x) = Z_w(y) \ \Leftrightarrow \ \exists \ A \subseteq X$ *wegzusammenhängend:* $x,y \in A \Leftrightarrow \exists$ *ein Weg der x,y verbindet.*

Definition 10.5. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, R Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \to X/_R,\ \pi(x) = [x]$ die Projektionsabbildung.*
*Die **Quotiententopologie** $\mathscr{O}_R$ auf $X/_R$ ist definiert durch*

$$\mathscr{O}_R := \{V \mid V \subseteq X/_R,\ \pi^{-1}(V) \in \mathscr{O}\}$$

und ist die feinste Topologie, bezüglich der π stetig ist.
*$(X, \mathscr{O}_R)$ heißt **Quotientenraum** von $(X, \mathscr{O})$ nach R.*

Beispiel 10.6. $X = \mathbb{R}^2$, $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x = x'$
Dann gilt nach Linearer Algebra, dass $\mathbb{R}^2/_\sim$ und $\mathbb{R}$ als Vektorräume isomorph sind.

Wir wollen nun zeigen, dass sie auch homöomorph sind. Dazu benötigen wir den

Satz 10.7. *Seien X, Y topologische Räume, R eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \to X/_R$. Dann gilt:*

(i.) $f : X/_R \to Y$ *stetig* $\Leftrightarrow f \circ \pi : X \to Y$ *stetig*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f\circ\pi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/_R \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

(ii.) Sei $g : Y \to X/_R$ und es existiere eine stetig Abbildung $g' : Y \to X$ mit $\pi \circ g' = g$
Dann ist g stetig.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & X/_R & \end{tikzcd}$$

(iii.) Ist $f : X/_R \to Y$ und ist $f \circ \pi$ offen, so ist f offen.

Beweis. zu (i.):

"$\Rightarrow$": f stetig $\overset{\pi \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $f \circ \pi$ stetig

"$\Leftarrow$": Sei $f \circ \pi$ stetig und $V \subseteq Y$ offen $\Rightarrow$ $(f \circ \pi)^{-1}(V)$ ist offen in X also $(f \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(f^{-1}(V)) \in \mathscr{O}_X$ und damit nach Definition $f^{-1}(V) \in \mathscr{O}_R$

zu (ii.): klar

zu (iii.): Sei $V \subseteq X/_R$ offen $\Rightarrow$ $f(V) = (f \circ \pi)(\underbrace{\pi^{-1}(V)}_{\in \mathscr{O}_X}) \overset{f\circ\pi \text{ offen}}{\Longrightarrow} f(V)$ offen in Y $\square$

Beispiel 10.8. *(i.) Sei $\mathbb{R}^2/_\sim$ wie in Beispiel 10.6, dann ist $\mathbb{R}^2/_\sim$ homöomorph zu $\mathbb{R}$*
Denn sei $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p_1(x, y) = x$. Dann ist p_1 stetig und offen und es gilt $p_1(x, y) = p_1(x', y') \Leftrightarrow (x, y) \sim (x', y')$
Also ist die induzierte Abbildung $\overline{p_1} : \mathbb{R}^2/_\sim \to \mathbb{R}$ wohldefiniert, stetig, offen und offensichtlich auch bijektiv und damit ein Homöomorphismus.

(ii.) *Betrachte die Äquivalenzrelation auf $X = [0,1]$ welche 0 und 1 identifiziert und die Abbildung $f : [0,1]/_\sim \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$ vermge $f([t]) := e^{2\pi i t}$, dann ist diese wohldefiniert, stetig und bijektiv und offen also ein Homöomorphismus.*
Achtung, f ist offen obwohl $f \circ \pi$ ***nicht*** *offen ist. $f \circ \pi([0, 0.5))$ ist der obere links offene, rechts abgeschlossene Halbkreis im Einheitskreis, also nicht offen in S^1, $[0, 0.5)$ ist aber offen in X. Jede offene Menge in $[0,1]/_\sim$, die nicht der ganze Raum ist, darf aber die Klasse $[0] = [1]$ nicht enthalten, weil sonst das Urbild unter π ein Intervall vereinigt mit einem Punkt, also nicht offen, ist. Sind die Randpunkte nicht in einer offenen Menge $U \subseteq [0,1]/_\sim$ so ist diese aber ein offenes Intervall in $[0,1]$ und es gilt offensichtlich, dass $f(U)$ ein offenes Kreissegment in S^1 ist, darum ist f offen.*
Dies zeigt insbesondere, dass (iii.) in Satz 10.7 nicht umkehrbar ist.
(Vergleiche auch Bemerkung 6.1)

Satz 10.9. *Sei X ein topologischer Raum und R eine Äquivalenzrelation auf X. Dann gilt:*

(i.) *X kompakt $\Rightarrow X/_R$ kompakt*

(ii.) *X (weg-)zusammenhängend $\Rightarrow X/_R$ (weg-)zusammenhängend*

(iii.) *$X/_R$ hausdorffsch $\Rightarrow \forall x \in X$ ist $[x]$ als Teilmenge von X abgeschlossen.*

Beweis.

(i.): folgt aus 6.7 (i.), da π stetig und $\pi(X) = X/_R$

(ii.): folgt aus Satz 4.8, da π stetig und $\pi(X) = X/_R$

(iii.): $X/_R$ hausdorffsch $\Rightarrow \ \forall x \in X : \ \{[x]\} \subseteq X/_R$ ist abgeschlossen in $X/_R$ (da $X/_R$ T_1 ist)
Da π stetig ist $\Rightarrow \pi^{-1}(\{[x]\}) = [x] \subseteq X$ ist abgeschlossen.

□

Wir wollen nun eine für die Topologie wichtige Klasse von Äquivalenzrelationen festlegen.

Definition 10.10. *Sei X ein topologischer Raum und $A_1, ...A_n \subseteq X$ nicht leer und disjunkt. Definiere Äquivalenzrelation durch:*

$$x \sim y \ :\Leftrightarrow \quad x = y \text{ oder } \exists i \in \{1, ..., n\} : \ \{x, y\} \in A_i$$

es gilt also: $\quad x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \Rightarrow \ [x] = \{x\}$

und $\quad x \in A_i \quad \Rightarrow \ [x] = A_i$

$$\frac{X}{A_1, ..., A_n} := X/_R$$

Bemerkung: In $\frac{X}{A_1,...,A_n} := X/_R$ werden die Mengen A_i auf einen Punkt zusammengeschlagen.

Beispiel 10.11. *$CX := \frac{X \times [0,1]}{X \times \{1\}}$ stellt einen Kegel dar, wie wir (zumindest im Fall $X \subseteq \mathbb{R}^n$) im nächsten Satz sehen werden.*

Satz 10.12. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, dann ist CX homöomorph zu*

$$\widetilde{CX} := \{(1-t)x + tp \mid t \in [0,1], x \in X\}$$

für alle $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $p_{n+1} \neq 0$

Beweis. Wir schreiben für $x \in \mathbb{R}^{n+1}: \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ mit $x_1 \in \mathbb{R}^n, \ x_{n+1} \in \mathbb{R}$

Definiere $\widetilde{f}: X \times [0,1] \to \widetilde{CX} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ durch $\widetilde{f}(x,t) := (1-t)x + tp$
Diese Abbildung ist stetig und surjektiv und außerdem ist $\widetilde{f}(X \times \{1\}) = \{p\}$
$\Rightarrow$ die induzierte Abbildung $f : \frac{X \times [0,1]}{X \times \{1\}} \to \widetilde{CX}$ mit $f([(x,t)]) := \widetilde{f}(x,t)$ ist wohldefiniert und $f \circ \pi = \widetilde{f}$
Nach Satz 10.7 ist f stetig und surjektiv
f ist aber nun auch injektiv, denn sei $f([(x,t)]) = f([x',t')])$
$\Rightarrow (1-t)x + tp = (1-t')x + t'p \Rightarrow (1-t)\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + tp = (1-t')\begin{pmatrix} x_1' \\ 0 \end{pmatrix} + t'p$
$\Rightarrow (1-t)\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} - (1-t')\begin{pmatrix} x_1' \\ 0 \end{pmatrix} = (t'-t)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_{n+1} \end{pmatrix}$
$\Rightarrow t = t'$ (n+1.te Zeile) $\Rightarrow (1-t)\begin{pmatrix} x_1 - x_1' \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
$\Rightarrow x_1 = x_1'$ oder $t = 1 = t'$
In beiden Fällen gilt $[(x,t)] = [(x',t')]$, also ist f injektiv.
Es gilt, dass $\widetilde{f}$ offen ist (diesen technischen Beweis werden wir nicht ausführen) und damit ist nach Satz 10.7 auch f offen, also ist f ein Homöomorphismus. □

Beispiel 10.13. *Sei* $\overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$
Dann gilt: $\frac{\overline{B^n}}{S^{n-1}}$ *ist homöomorph zu* S^n

Bemerkung: Man kann sich dies für $n = 2$ recht gut vorstellen, wenn man den Rand der Kreisscheibe zu einem Punkt zusammenschlägt, wird diese gerade zur Sphäre im $\mathbb{R}^3$ gewölbt.

Beweis. Jedes Element y aus $\overline{B^n}$ kann als $y = tx$ mit $t \in [-1,1]$ und $x \in S^{n-1}$ geschrieben werden.
Definiere $\widetilde{f}: \overline{B^n} \to S^n$ nun folgendermaßen:

$$\widetilde{f}(tx) := -\cos(\pi t)e_{n+1} + \sin(\pi t) \cdot (x, 0)$$

Dabei ist $e_{n+1} = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$
Diese Abbildung transformiert einen Durchmesser von $\overline{B^n}$ auf einen Großkreis von S^n
Es gilt $\widetilde{f}(0) = e_{n+1}, \ \widetilde{f}(x) = e_{n+1} \ \forall x \in S^{n-1}$ und $\widetilde{f}$ ist wohldefiniert (Beachte, dass man $y \in \overline{B^n}$ auf 2 Arten als tx schreiben kann), surjektiv und stetig.
Außerdem ist die induzierte Abbildung $f : \frac{\overline{B^n}}{S^{n-1}} \to S^n$, $f([tx]) := \widetilde{f}(tx)$ wieder wohldefiniert, stetig und bijektiv.
Da $\frac{\overline{B^n}}{S^{n-1}}$ kompakt und S^n hausdorffsch ist $\Rightarrow f$ ist Homöomorphismus nach Satz 6.7 (ii.) □

Ähnlich zeigt man

Satz 10.14.
$$\frac{S^n \times [-1,1]}{S^n \times \{-1\}, S^n \times \{1\}} \cong S^{n+1}$$

Beweis. Sei $H : S^n \times [-1,1] \to S^{n+1}$ definiert durch

$$(x,t) \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}(t+1)) + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}(t+1))$$

Dann liefert die induzierte Abbildung wieder die Behauptung. □

Wir wollen nun noch einige Beispiele angeben. Zuvor brauchen wir noch folgende einfach Definition, die uns die Notationen erleichtern soll:

Definition 10.15. *Sei X eine Menge und $R' \subseteq X \times X$. Die von R'* ***erzeugte Äquivalenzrelation*** *ist die kleinste Menge $R \subseteq X \times X$ die, die 3 Axiome aus Definition 10.1 erfüllt und R' enthält.*

Beispiel 10.16. *(i.)* ***Zylinder:***

Sei $X := \mathbb{R} \times [0,1]$ und R die von $(x,0) \sim (x,1)$ erzeugte Äquivalenzrelation auf X.
Zur Anschauung sei diese hier nocheinmal ausgeschrieben:
$(x,y) \sim (x',y') \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (x',y')$ *oder* $(y, y' \in \{0,1\} \wedge x = x')$
$\Rightarrow [(x,y)] = \{(x,y)\} \; \forall 0 < y < 1$ *und* $[(x,y)] = [(x,1)] = \{(x,0),(x,1)\}$ *sonst.*

$X/_R$ ist homöomorph zu $\mathbb{R} \times S^1$ entspricht also der Anschauung eines Zylinders.
Denn
$$\widetilde{f} : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R} \times S^1, \; \widetilde{f}(x,y) := (x, \cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$$
dann ist die induzierte Abbildung wieder der gesuchte Homöomorphimus.

(ii.) **2*-dim Torus:***

Auf $X = [0,1] \times [0,1]$ definiere die von $(x,0) \sim (x,1),\; x \in [0,1]$ und $(0,y) \sim (1,y),\; y \in [0,1]$ erzeugte Äquivalenzrelation.
Dann ist $X/_R$ homöomorph zu $S^1 \times S^1$ (Donut)

(iii.) ***Mö**biusband:*

Auf $X = [0,1] \times [0,1]$ definiert man die von $(0,y) \sim (1, 1-y),\; y \in [0,1]$ erzeugte Äquivalenzrelation.
$X/_R$ nennt man das Möbiusband, es ist eine Figur mit nur einem Rand und einer Oberfläche.

(iv.) ***Kleinsche Flasche:***[2]

$X = (S^1 \times [0,1])/_R$ und R erzeugt von $(x,y,0) \sim (x,-y,1)$, d.h. es werden die Randkreise in entgegengesetzter Richtung miteinander verklebt.

(v.) ***n-dim reeller projektiver Raum:***

$\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_R$ *mit* $x \sim y \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \; x = \lambda y$
Damit ist der $\mathbb{R}P^n$ die Menge der $1-$ dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$

Definition 10.17. *(Verkleben von Räumen)*
Seien X, Y disjunkte topologische Räume und $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ stetig.
Betrachte auf $X \cup Y$ die Summentopologie und die Äquivalenzrelation R_f erzeugt von $x \sim f(x) \; \forall x \in A$, also ist

$$\begin{aligned}
[x] &= \{x\} \text{ falls } x \in X \setminus A \\
[x] &= \{f(x)\} \cup f^{-1}(\{f(x)\}) \text{ falls } x \in A \\
[y] &= \{y\} \cup f^{-1}(\{y\}) \text{ falls } y \in f(A) \\
[y] &= \{y\} \text{ falls } y \in Y \setminus f(A)
\end{aligned}$$

Man schreibt $X \cup_f Y := (X \cup Y)/_{R_f}$ und bezeichnet diesen Raum als die ***Verklebung von X und Y via f.***

Beispiel 10.18. *Sei $X := S^1 \times [0,1]$ und Y die S^2 mit zwei kreisrunden Löchern.*
Verklebt man X mit Y via $f : S^1 \times \{0,1\} \to Y$ mit einem f, dass die Randkreise des Zylinders X gerade auf die Ränder der 2 Löcher auf der S^2 abbildet, dann erhält man die S^2 mit einem Henkel. Diese Figur ist wiederum homöomorph zum Torus T^2.

[2]Popkulturreferenz: In der Folge "The Route of All Evil" der US-Serie Futurama kann man einige Kleinsche Flaschen im Regal erkennen (Klein's Beer). Die Serie ist voll mit solchen netten mathematischen Anspielungen.

10.1 Quotienten nach Gruppenoperationen

Wir erinnern an die Definition einer Gruppenoperation

Definition 10.19. *Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und X eine Menge. Eine Abbildung*

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\to g.x \end{aligned}$$

heißt ***Gruppenoperation von*** G ***auf*** X*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(i.) $e.x = x \ \forall x \in X$

(ii.) $\forall g, h \in G, \forall x \in X : \ g.(h.x) = (g \cdot h).x$

Zu $x \in X$ heißt

- $G_x := \{g \in G \mid g.x = x\}$ *die* ***Isometriegruppe oder Standgruppe*** *von x und*
- $G.x := \{g.x \mid g \in G\}$ *der $G-$* ***Orbit*** *bzw. die* ***Bahn*** *von x*

Schließlich heißt eine Gruppenoperation ***transitiv***
$\Leftrightarrow \forall x, y \in X \ \exists g \in G : \ g.x = y$

Bemerkung: Für zwei Gruppenelemente $g, h \in G$ schreiben wir wie üblich $gh := g \cdot h$ und für zwei isomorphe Gruppen G, H schreiben wir $G \simeq H$

Folgerung 10.20. *(i.) G_x ist eine Untergruppe von G*

(ii.) Eine Gruppenoperation induziert eine Äquivalenzrelation auf X vermöge:

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ \exists g \in G : \ x = g.y$$

Die Bahnen $G.x$ der Gruppenoperation sind genau die Äquivalenzklassen $[x]$, also insbesondere disjunkt nach Folgerung 10.2.

(iii.) Die Operation ist transitiv $\Leftrightarrow \ \forall x \in X : \ G.x = X$

(iv.)

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\to g.x \end{aligned}$$

ist eine Gruppenoperation $\Leftrightarrow$ Die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\to S_X := \{f : X \to X \mid f \text{ bijektiv}\} \\ g &\to (x \to g.x) \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. zu (i.): $e \in G_x$ ist klar.
Seien $g, h \in G_x \Rightarrow (gh).x = g.(h.x) = g.x = x \Rightarrow gh \in G_x$
Also ist G_x eine Untergruppe.

zu (ii.): Es ist $x \sim x$ mit $g = e$, also ist $\sim$ reflexiv.
Sei $x \sim y$, dann ist $x = g.y$, also gilt $y = g^{-1}.(g.y) = g^{-1}.x \Rightarrow\ y \sim x$, also ist $\sim$ symmetrisch.
Sei $x \sim y$ und $y \sim z$, dann ist $x = g.y$ und $y = h.z$, also $x = g.(h.z) = (gh).z \Rightarrow x \sim z$, also ist $\sim$ transitiv.

zu (iii.): ist klar

zu (iv.): eigentlich klar, die Homomorphismuseigenschaft kommt gerade aus (ii.) in Definition 10.19. Um die Bijektivität von $F_g(x) := g.x$ zu zeigen benötigt man die Eigenschaften (i.) und (ii.) in 10.19 □

Definition 10.21. *Sei eine Operation von G auf X gegeben, dann nennt man $X/_G := \{Gx \mid x \in X\}$ den **Orbitraum oder Bahnenraum** der Gruppenoperation.*
Ist X ein topologischer Raum, so ist $X/_G$ ein topologischer Raum mit der Quotiententopologie.

Beispiel 10.22. *(i.) $Gl(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$ operiert auf $\mathbb{R}^n$ vermöge $(A, x) \to A.x := A \cdot x$, allerdings nicht transitiv, da $Gl(n, \mathbb{R}).0 = \{0\}$*

(ii.) $(\mathbb{Z}^n, +)$ operiert auf $\mathbb{R}^n$ vermöge $(k, x) \to k.x := x+k$, da $\mathbb{Z}^n.x = x+\mathbb{Z}^n$ ist diese Operation nicht transitiv.

(iii.) Sei $G(n, k) = \{V \mid V\ k-\mathit{dim}$ Untervektorraum des $\mathbb{R}^n\}$ und $O(n) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) \mid A^T = A\}$, dann ist

$$\begin{aligned} O(n) \times G(n, k) &\to G(n, k) \\ (A, V) &\to A.V := A(V) \end{aligned}$$

eine transitive Gruppenoperation und die Isotropiegruppe von $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist gegben durch

$$\begin{aligned} &\left\{A \in O(n) \mid A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ mit } A_1 \in O(k), A_2 \in O(n-k)\right\} \\ &=: O(k) \times O(n-k) \subseteq O(n) \end{aligned}$$

Beweis. Es ist nur im letzten Beispiel etwas zu zeigen.
zur Transitivität:

Seien U, V $k-$ dimensionale Untervektorräume. Es lassen sich Orthonormalbasen (ONB) $u_1, ..u_k$ von U und $v_1, .., v_k$ von V wählen und zu ONB des $\mathbb{R}^n$ erweitern.
Die Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $A(u_i) = v_i$ ist in $O(n)$ und es gilt $A(U) = V$
Denn:
Seien λ^i_j so gewählt, dass $e_i = \sum \lambda^i_j u_j$, wobei e_i der $i-$ te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ ist, dann gilt $\delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^i_k \cdot \lambda^j_k$, wobei $\langle ., .\rangle$ das übliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.
Also gilt:

$$\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \left\langle \lambda^i_k Au_k, \lambda^j_l Au_l\right\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \lambda^i_k \lambda^j_l \underbrace{\langle v_k, v_l\rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda^i_k \cdot \lambda^j_k = \delta_{ij}$$

Also ist $A \in O(n)$ und $A(U) = V$ ist offensichtlich.
Die Behauptung über die Isotropiegruppe lässt sich leicht verifizieren. □

Beispiel 10.23. *Als topologische Räume gilt*

(i.) $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2} \cong T^2$

(ii.) $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \cong S^1$

Definition 10.24. *Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G, dann operiert H von rechts auf G vermöge*

$$\begin{aligned} H \times G &\to G \\ (h, g) &\to h.g := g \cdot h \end{aligned}$$

die induzierte Äquvalenzrelation ist also

$$g_1 \sim_H g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H: \; g_1 = g_2 h \Leftrightarrow \; g_2^{-1} g_1 \in H$$

Der zugehörige Bahnenraum ist

$$G/_H = \{H.g \mid g \in G\} = \{[g] \mid g \in G\} = \{gH \mid g \in G\}$$

Lemma 10.25. *Operiert die Gruppe G transitiv auf X, so ist für jedes $x \in X$ die Abbildung*

$$\begin{aligned} G/_{G_x} &\to X \\ g.G_x &\to g.x \quad \textit{wohldefiniert und bijektiv} \end{aligned}$$

Beweis. (i.) Seien $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1.G_x = g_2.G_x$
$\Rightarrow \; g_1 = g_2 h$, mit $h \in G_x \Rightarrow g_1.x = (g_2 h).x = g_2.(h.x) = g_2.x$ da $h \in G_x$
also ist die Abbildung wohldefiniert.

(ii.) Seien $g_1, g_2 \in G$ und $g_1.x = g_2.x$
$\Rightarrow \; g_2^{-1}.(g_1.x) = g_2^{-1}.(g_2.x) = x \; \Rightarrow \; g_2^{-1} g_1 \in G_x$
$\Rightarrow g_1 \sim_{G_x} g_2 \; \Rightarrow \; g_1.G_x = g_2.G_x$
allso ist die Abbildung injektiv.

(iii.) Sei $y \in X \Rightarrow \; \exists g \in G: \; g.x = y$ wegen der Transitivität, also ist die Abbildung surjektiv. □

Bemerkung: Trägt die Gruppe G eine Topolgie, lässt sich so eine Topologie auf X definieren, denn sei $\varphi : G/_{G_x} \to X$ obige Bijektion, dann definiert

$$\mathscr{O}_X := \{\varphi^{-1}(U) \mid U \text{ offen in Quotiententopologie von } G/_{G_x}\}$$

eine Topologie auf X

Beispiel 10.26. *Nach Beispiel 10.22 gilt, dass $O(n)/_{O(k) \times O(n-k)}$ vermöge der Abbildung in 10.25 zu $G(n,k)$ bijektiv ist und da $O(n)$ eine Topolgie trägt (von beliebiger Matrixnorm auf $O(n)$ induziert) lässt sich die Topologie*

$$\mathscr{O}_{G(n,k)} := \{\varphi^{-1}(U) \mid U \textit{ offen in } O(n)/_{O(k) \times O(n-k)}\}$$

definieren. Diese nennt man die übliche Topologie auf $G(n,k)$

Definition 10.27. *Eine Gruppe $(G, \cdot)$ mit einer Topolgie $\mathscr{O}_G$ heißt **topologische Gruppe**, falls die Abbildung*

$$(g, h) \in G \times G \to g h^{-1} \in G$$

stetig ist. (bezüglich der Produkttopologie von $\mathcal{O}_G$ auf $G \times G$ und $\mathcal{O}_G$ auf G)

Folgerung 10.28. *Sei G eine topolgische Gruppe. Dann sind die Abbildungen*

$$l_g : h \in G \to gh \in G \quad \text{und} \quad r_g : h \in G \to hg \in G$$

also die Links- und Rechtsmultiplikation, Homöomorphismen.

Beweis. Sei $g \in G$ fest.
Definiere $\varphi : G \to G \times G$ gegeben durch $\varphi(h) := (g^{-1}, h)$, sowie
$\psi : G \times G \to G$ gegeben durch $\psi(g_1, g_2) := g_1^{-1} g_2$
Dann ist ψ stetig, nach Definition der topologischen Gruppe und es ist nicht schwer nachzuweisen (g ist fest), dass auch φ stetig ist.
Also ist $l_g = \psi \circ \varphi$ stetig.
$l_{g^{-1}}$ ist offensichtlich eine Umkehrabbildung die nach obigem stetig ist, also ist l_g ein Homöomorphismus.
Analog zeigt man dies für r_g □

Beispiel 10.29. *(i.) $(G, \cdot) = (\mathbb{R}^n, +)$ mit der üblichen Topologie ist eine topologische Gruppe, denn*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to x - y \in \mathbb{R}^n$$

ist stetig.

(ii.) Allgemeiner gilt (i.) mit $G = (V, ||.||)$ beliebiger normierter Vektorraum.

(iii.) $G = Gl(n, \mathbb{R})$ und $|.|$ eine beliebige Matrixnorm (alle solchen Normen sind äquivalent), dann wird $Gl(n, \mathbb{R})$ ein topolgischer Raum.
$(Gl(n, \mathbb{R}), \cdot)$, wobei " $\cdot$ " die Matrizenmultiplikation ist, ist sogar eine topologische Gruppe.

Beweis. Es ist nur bei (iii.) etwas zu zeigen:

$$(A, B) \in Gl(n, \mathbb{R}) \times Gl(n, \mathbb{R}) \to A \cdot B \in Gl(n, \mathbb{R})$$

ist stetig, da es ein Polynom in den Matrizeneinträgen ist. (Bemerke, dass auf die Produkttopolgie hier metrisierbar ist, nach Bemerkungen zu Lemma 6.16)
Ebenso ist

$$A \in Gl(n, \mathbb{R}) \to A^{-1} \in Gl(n, \mathbb{R})$$

stetig, da nach der Cramerschen Regel A^{-1} als Quotient zweier Polynome schreibbar ist.
Damit ist dann auch

$$(A, B) \to (A^{-1}, B) \to A^{-1} \cdot B$$

stetig, also $(Gl(n, \mathbb{R}), \cdot)$ eine topologische Gruppe. □

Definition 10.30. *Sei G eine topologische Gruppe und $H \subseteq G$ Untergruppe. Der Quotientenraum $G/_H$ mit der Quotiententopologie heißt* ***homogener Raum***

Folgerung 10.31. *Seien G, H wie in 10.30 und $\pi : G \to G/_H$ die Projektion, dann ist diese stetig und offen.*

Beweis. Stetigkeit folgt nach Definition der Quotiententopologie.
Sei $U \subseteq G$ offen. Es ist zu zeigen, dass $\pi(U)$ offen in $G/_H$ ist, d.h.:
$\mathbb{Z}$: $\pi^{-1}(\pi(U))$ ist offen in G

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cdot H = \bigcup_{h \in H} U \cdot h$$

Nun ist aber $U \cdot h = r_h(U)$ und damit offen in G, da r_h $\forall h \in H$ ein Homöomorphismus ist.
Also ist $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen in G □

Folgerung 10.32. *G operiert transitiv auf $G/_H$ vermöge*

$$\begin{aligned} G \times G/_H &\to G/_H \\ (g_1, [g_2]) &\to g_1.[g_2] := [g_1 g_2] \end{aligned}$$

Die nach Folgerung 10.20 (iv.) zu jedem $g \in G$ zugehörige Bijektion

$$\overline{l_g} : [g_1] \in G/_H \to [gg_1] \in G/_H$$

ist in diesem Fall sogar ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung $\overline{l_{g^{-1}}}$
Man sagt G operiert transitiv auf $G/_H$ durch Homöomorphismen.

Beweis. Es ist leicht zu zeigen, dass die Abbildung eine transitive Gruppenoperation ist.
Die Stetigkeit von $\overline{l_g}$ folgt aus der Stetigkeit von l_g und Satz 10.7, da das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "l_g"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/_H \arrow[r, "\overline{l_g}"'] & G/_H \end{tikzcd}$$

kommutiert. $\square$

Satz 10.33. *Ein homogener Raum $G/_H$ ist hausdorffsch $\Leftrightarrow$ H ist abgeschlossen in G*

Beweis. " $\Rightarrow$ " schon gezeigt in Satz 10.9 (iii.)

" $\Leftarrow$ " $G \setminus H$ ist offen in G, also ist $S := \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_2^{-1} g_1 \in G \setminus H\}$ offen, denn die Abbildung
$(g_1, g_2) \to (g_2, g_1) \to g_2^{-1} g_1$ ist stetig nach Definition der topologischen Gruppe.
Seien nun $[x] \neq [y]$ in $G/_H \Rightarrow (x, y) \in S$ nach Definition der Klassen in $G/_H$
Nach Definition der Produkttopologie existieren U_x, U_y offen in G mit $(x, y) \in U_x \times U_y \subseteq S$
$\Rightarrow [x] \in \pi(U_x)$ offen und $[y] \in \pi(U_y)$ offen, da π offen ist nach 10.31
Angenommen es gibt ein $[z] \in \pi(U_x) \cap \pi(U_y) \;\Rightarrow \exists x_1 \in U_x,\ y_1 \in U_y :\ [x_1] = [z] = [y_1] \Rightarrow\ y_1^{-1} x_1 \in H$
aber es ist $(x_1, y_1) \in U_x \times U_y \subseteq S$, dies ergibt einen Widerspruch, also gilt $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$ und damit folgt, dass $G/_H$ hausdorffsch ist. $\square$

Als letzten Satz halten wir noch fest, wann man einen topologischen Raum als homogenen Raum darstellen kann.

Satz 10.34. *Sei G eine kompakte topologische Gruppe, X ein topologischer Hausdorffraum und $G \times X \to X$ eine* ***stetige*** *transitive Gruppenoperation von G auf X. Dann gilt für jedes $x \in X$:*

$$G/_{G_x} \text{ ist homöomorph zu } X$$

Beweis. Sei x fest.
Nach Lemma 10.25 ist $I : G/_{G_x} \to X,\ g.G_x \to g.x$ eine bijektive Abbildung.
Es ist $I \circ \pi(g) = g.x$ stetig, da $I \circ \pi = \varphi \circ \psi$ mit $\varphi : G \to G \times X,\ g \to (g, x)$ und $\psi : G \times X \to X,\ (g, y) \to g.y$, die beide stetig sind (φ offensichtlich und ψ nach Voraussetzung)
Damit liefert Satz 10.7 die Stetigkeit von I
Da $G/_{G_x}$ kompakt und X hausdorffsch ist folgt nach 6.7, dass I ein Homöomorphismus ist. $\square$

11 Homotopie

Das wichtigste Konzept in der algebraischen Topologie ist die sogenannte Homotopie, die besagt, dass man zwei stetige Abbildungen stetig ineinander deformieren kann.
Insbesondere die Homotopie von Wegen hat weitreichende Anwendungen, besonders in der Funktionentheorie (Cauchyscher Integralsatz)

In den folgenden Kapiteln sei stets $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ und X, Y, Z topologische Räume.

Definition 11.1. *Seien $f, g : X \to Y$ stetig. Dann heißt f* ***homotop*** *zu g*
$:\Leftrightarrow$ es existiert eine stetige Abbildung $h : X \times I \to Y$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$h(x,0) = f(x), \; h(x,1) = g(x)$$

Bezeichnung: h heißt Homotopie von f nach g und man schreibt $f \sim_h g$ oder $f \sim g$.
Man kann sich hierbei die Abbildungsschar $h_t : X \to Y, \; h_t(x) := h(x,t)$ als Deformation von $h_0 = f$ nach $h_1 = g$ vorstellen.

Bemerkung: Die h_t sind stetig, denn es gilt allgemein:
Ist $f : X \times Y \to Z$ stetig, dann ist $\forall x \in X$ die Abbildung $f_x : Y \to Z, \; f_x(y) := f(x,y)$ stetig.

Definition 11.2. *Seien f, g, h wie in 11.1*
Sei $A \subseteq X$ und $f_{|A} = g_{|A}$. Gilt dann für h, dass $\forall t \in I : \; (h_t)_{|A} = f_{|A} (= g_{|A})$ ist, so nennt man f und g relativ A-homotop.
Man schreibt $f \sim_{relA} g$.

Bemerkung: Besonders wichtig ist dies bei Wegen $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ mit gleichem Startpunkt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und gleichem Endpunkt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$
Eine relative $\{0,1\}$-Homotopie hält dann gerade diese Punkte fest.

Beispiel 11.3. *Sei $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ gegeben durch $\gamma_1(t) = \exp(\pi i t)$ und $\gamma_2(t) = \exp(-\pi i t)$ also die Nord-, bzw. Südhälfte des Einheitskreisrands.*
Dann haben diese Wege gleichen Start- und Endpunkt, sind aber in X nicht $rel - \{0,1\}$ homotop, wegen des Loches in der Mitte. Sie sind allerdings homotop in X wenn nur Homotopie nach Definition 11.1 gefordert wird.
In $X = \mathbb{C}$ sind sie wiederum sogar $rel - \{0,1\}$ homotop.

Satz 11.4. *"Homotopie" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y.*

Beweis. (i.) Es gilt $f \sim f$ mit $h(x,t) = f(x) \Rightarrow \sim$ reflexiv
(ii.) Sei $f \sim_h g \Rightarrow \; g \sim_{\overline{h}} f$ mit

$$\overline{h} : X \times I \to Y, \; \overline{h}(x,t) := h(x, 1-t)$$

denn $\overline{h}$ ist stetig und es gilt $\overline{h}(x,0) = h(x,1) = g(x), \; \overline{h}(x,1) = h(x,0) = f(x)$
$\Rightarrow \sim$ symmetrisch
(iii.) Sei $f_0 \sim_h f_1$ und $f_1 \sim_k f_2$ Z.z.: $f_0 \sim f_2$
Definiere $H : X \times I \to Y$ durch $H(x,t) := \begin{cases} h(x,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$
Dies ist wohldefiniert, da $h(x,1) = k(x,0) = f_1(x)$ gilt und es sind $H_{|X \times [0, \frac{1}{2}]}$ und $H_{|X \times [\frac{1}{2}, 1]}$ stetig, also ist H stetig nach Lemma 3.5.
Schließlich gilt $H(x,0) = h(x,0) = f_0(x)$ und $H(x,1) = k(x,1) = f_2(x)$
Also $f_0 \sim f_2 \Rightarrow \sim$ transitiv. $\square$

Bemerkung: Sei $g : A \subseteq X \to Y$ und $\mathscr{F} := \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig } f_{|A} = g\}$, dann zeigt man analog, dass $relA-$Homotopie eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{F}$ ist.

Lemma 11.5. *$f_0, f_1 : X \to Y$, $g_0, g_1 : Y \to Z$ seien alle stetig und $f_0 \sim_h f_1$, $g_0 \sim_k g_1$*
$\Rightarrow$ $g_0 \circ f_0 \sim_H g_1 \circ f_1$ wobei $H(x,t) := k(h(x,t),t)$

Beweis. klar □

Beispiel 11.6. *$id_{\mathbb{R}^n}$ ist homotop zur konstanten Abbildung*

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ g(x) := 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. $h : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $h(x,t) := tx$
$\Rightarrow\ h_0 = g,\ h_1 = id_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow g \sim id_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow\ id_{\mathbb{R}^n} \sim g$ □

Definition 11.7. *(i.) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Homotopieäquivalenz** $:\Leftrightarrow \exists\ g : Y \to X$ stetig, so dass $g \circ f \sim id_X$ und $f \circ g \sim id_Y$*
*g heißt **Homotopieinverses** zu f und ist i.a. nicht eindeutig*

*(ii.) X und Y heißen **homotopieäquivalent** $(X \sim Y)$*
$:\Leftrightarrow\ \exists$ Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$

*(iii.) X heißt **zusammenziehbar** $\Leftrightarrow$ X ist homotopieäquivalent zu einem 1-punktigen Raum.*

Bemerkung:

(i.) "homotopieäquivalent" ist eine Äquivalenzrelation (folgt aus 11.5)

(ii.) X, Y homöomorph $\Rightarrow$ X, Y homotopieäquivalent

(iii.) Viele topologische Eigenschaften sind **nicht** invariant unter Homotopieäquivalenz
z.B. Kompaktheit, Dimension

Lemma 11.8.

$$X \text{ ist zusammenziehbar } \Leftrightarrow \exists\ h : X \times I \to X \text{ stetig mit}$$
$$h_0 = id_X,\ h_1(X) \text{ ist 1-Punkt Menge}$$

Beweis. " $\Leftarrow$ " Sei $h_1(X) = \{x_0\} \subseteq X$
Definiere $f : X \to \{x_0\}$ und $g : \{x_0\} \to X,\ g(x_0) = x_0$
Dann gilt $f \circ g = id_{\{x_0\}}$ und $g \circ f : X \to X,\ g \circ f(x) = x_0 \Rightarrow\ g \circ f = h_1$
Nach Voraussetzung gilt: $g \circ f \sim id_X$ und es folgt die Zusammenziehbarkeit.

" $\Rightarrow$ " Sei X homotopieäquivalent zu einem 1-Punktraum Y, dann ist Y homöomorph zu jeder beliebigen 1-punktigen Teilmenge von X
Wähle $\{x_0\} \subseteq X$, dann ist also $X \sim \{x_0\}$
Definiere die einzige Abbildung $f : X \to \{x_0\}$, dann existiert zu dieser ein Homotopieinverses $g : \{x_0\} \to X$ mit $id_X \sim_h g \circ f$
Also existiert $h : X \times I \to X$ stetig, mit $h_0 = id_X$ und $h_1 = g \circ f$
Dies ist die gesuchte Abbildung. □

Definition 11.9.

$$X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ heißt sternförmig } :\Leftrightarrow \exists x_0 \in X\ \forall x \in X, \forall t \in [0,1] :$$
$$(1-t)x_0 + tx \in X$$

Beispiel 11.10. *Kreisscheiben und Rechtecke im $\mathbb{R}^2$ sind sternförmig.*

Folgerung 11.11. *$\mathbb{R}^n$ und jeder sternförmige Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar.*

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig.
Die Abbildung $h : U \times I \to U$ definiert durch $h(x,t) = (1-t)x_0 + tx$, mit x_0 Sternmittelpunkt, erfüllt die Voraussetzungen aus Lemma 11.8 $\square$

Beispiel 11.12. *(i.) Der Zylinder $Z = S^1 \times \mathbb{R}$ ist homotopieäquivalent zu S^1*

(ii.) Das Möbiusband $M = [0,1]\times[0,1]/_R$ mit R erzeugt von $(0,y) \sim (1,1-y)$ ist homotopieäquivalent zu S^1

(iii.) Sei $p \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $n \geq 2$, dann ist $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ homotopieäquivalent zu S^{n-1}

Beweis. <u>zu (i.):</u> Definiere $f : S^1 \to S^1 \times \{0\} \subseteq Z,\ f(s) = (s,0)$ und $g : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1,\ g(s,t) = s$, dann sind diese homotopieinvers zueinander, denn:
$g \circ f = id_{S^1}$ und $f \circ g(s,t) = (s,0)$ ist homotop zu id_Z via

$$h : Z \times I \to Z,\ h((s,t),\tau) := (s,\tau t)$$

<u>zu (ii.):</u> Definiere $\widetilde{f} : [0,1] \times [0,1] \to \frac{[0,1]}{\{0,1\}} \cong S^1$ durch $\widetilde{f}(x,y) := [x]$

Die induzierte Abbildung $f : M \to \frac{[0,1]}{\{0,1\}}$ mit $f \circ \pi = \widetilde{f}$ (hier ist $\pi : [0,1] \times [0,1] \to M$ wie üblich die Projektion) ist wohldefiniert und stetig nach 10.7
Definiere $g : \frac{[0,1]}{\{0,1\}} \to M$ durch $g([x]) := [(x, \frac{1}{2})]$, dann ist auch g wohldefiniert und stetig nach 10.7

Es ist $f \circ g = id_{\frac{[0,1]}{\{0,1\}}}$ und $g \circ f([(x,y)]) = [(x, \frac{1}{2})]$
Noch $Z\!\!\!Z$: $g \circ f \sim id_M$
Sei $\widetilde{H} : [0,1] \times [0,1] \times I \to [0,1] \times [0,1]$ definiert durch

$$\widetilde{H}(x,y,t) := (x, \frac{1}{2}t + (1-t)y)$$

Dann induziert $\widetilde{H}$ die Abbildung $H : M \times I \to M,\ H([(x,y)],t) = \widetilde{H}(x,y,t)$
Es ist zu zeigen, dass H wohldefiniert und stetig ist:
Es gilt

$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times [0,1] \times I} \arrow[rr, "(\pi, id_I)"] \arrow[dr, "\pi\circ\widetilde{H}"'] & & M \times I \arrow[dl, "M"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ und $\pi \circ \widetilde{H}$ ist stetig, da π und $\widetilde{H}$ stetig sind.
Dann ist auch $H \circ (\pi, id_I)$ stetig (dies folgt analog, mit leicht abgewandeltem Beweis, wie in Satz 10.7)
Es bleibt noch zu zeigen, dass H wohldefiniert ist, seien also $[(x,y)] = [(x',y')]$ in M, dann ist entweder $x = x'$ und $y = y'$ oder $x = 0, x' = 1$ und $y = 1 - y'$
Der erste Fall ist trivial, also betrachten wir den zweiten.
Es gilt dann: $H([(x,y)],t) = [(0, \frac{1}{2}t + (1-t)y)]$ und $H([(x',y')],t) = [(1, \frac{1}{2}t + (1-t)(1-y))]$
Es ist zu zeigen, dass diese gleich sind in M, d.h. dass $1 - (\frac{1}{2}t + (1-t)y) = \frac{1}{2}t + (1-t)(1-y)$ gilt.
Dies folgt aber sofort durch ausmultiplizieren.
Damit ist H stetig, wohldefiniert und es gilt $H_0 = id_M$ und $H_1 = g \circ f$
$\Rightarrow\ g \circ f \sim id_M$

und damit $M \sim \frac{[0,1]}{\{0,1\}}$ und wegen $\frac{[0,1]}{\{0,1\}} \sim S^1 \Rightarrow\ M \sim S^1$

zu (iii.): Sei $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ definiert durch $f(x) := p + x$ und
$g : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \to S^{n-1}$ definiert durch $g(x) := \frac{x-p}{|x-p|}$ wobei $|.|$ die gewählte Norm ist.
Dann sind f, g homotopieinvers zueinander (Übung) $\square$

12 Die Fundamentalgruppe

In diesem Kapitel führen wir die Fundamentalgruppe ein, die von großem Interesse bei der Untersuchung algebraischer Strukturen in der Topologie ist.
Unser Ziel wird es sein einem topologischen Raum X mit ausgezeichnetem Punkt $x_0 \in X$ eine Gruppe $\pi_1(X, x_0)$, sowie jeder stetigen Abbildung

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

einen enstprechenden Gruppenhomomorphismus

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

zuzuordnen.
(Wir werden im folgenden $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ schreiben um anzudeuten, dass $f(x_0) = y_0$ gilt.)
Es soll hierbei gelten:

$$(id_{(X,x_0)})_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$$

sowie

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$$
$$\Rightarrow \ (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Dies bedeutet gerade, dass π_1 als Funktor von der Kategorie der topologischen Räume mit Basispunkten in die Kategorie der Gruppen verstanden werden kann.

12.1 Homotopien von Wegen und Definition der Fundamentalgruppe

Zunächst werden wir einige Lemmata sammeln, die sich mit der Homotopie von Wegen beschäftigen.

Lemma 12.1. *Sind $\gamma_0, \gamma_0' : [0,1] \to X$ $rel\{0,1\}-$homotop und sind $\gamma_1, \gamma_1' : [0,1] \to X$ $rel\{0,1\}-$homotop mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$, so gilt*

$$\gamma_0 * \gamma_1 \textit{ ist } rel\{0,1\} - \textit{homotop zu } \gamma_0' * \gamma_1'$$

Beweis. Seien $h, k : [0,1] \times I \to X$ $rel\{0,1\}-$Homotopien von γ_0 zu γ_0' (h), bzw. von γ_1 zu γ_1' (k)
Definiere $H : [0,1] \times I \to X$ durch $H_t := h_t * k_t$, d.h.

$$H(s,t) = \begin{cases} h(2s,t) & 0 \le s \le \frac{1}{2},\ t \in I \\ k(2s-1,t) & \frac{1}{2} \le s \le 1,\ t \in I \end{cases}$$

Es ist $[0,1] \times I = [0, \frac{1}{2}] \times I \cup [\frac{1}{2}, 1] \times I$ und $H_{|[0,\frac{1}{2}]\times I},\ H_{|[\frac{1}{2},1]\times I}$ sind stetig.
$\overset{(3.5)}{\Rightarrow}$ H ist stetig.
Außerdem ist $H_0 = \gamma_0 * \gamma_0'$, $H_1 = \gamma_1 * \gamma_1'$ sowie $H_t(0) = \gamma_0(0),\ H_t(1) = \gamma_1(1) \ \ \forall t \in I$
also ist H eine $rel\{0,1\}-$Homotopie. □

Lemma 12.2. *Sei $\gamma : [0,1] \to X$ stetig und $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ stetig mit $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1$*
Dann sind γ und $\gamma \circ \varphi$ $rel\{0,1\}-$homotop.
(d.h. Umparametrisierungen sind homotop zueinander)

Beweis. Definiere $h : [0,1] \times I \to X$ durch $h(s,t) = \gamma((1-t)s + t\varphi(s))$, dann ist

$$h_0(s) = h(s,0) = \gamma(s) \ \Rightarrow\ h_0 = \gamma$$

$$h_1(s) = h(s,1) = \gamma(\varphi(s)) \ \Rightarrow\ h_1 = \gamma \circ \varphi$$

Außerdem ist $h_t(0) = h(0,t) = \gamma(0),\ h_t(1) = h(1,t) = \gamma(1)\ \forall t \in I$, also ist h eine $rel\{0,1\}-$Homotopie von γ nach $\gamma \circ \varphi$ $\square$

Folgerung 12.3. *Sei $\gamma : [0,1] \to X$ stetig und $\epsilon = \epsilon_{\gamma(0)} : [0,1] \to X$ definiert durch $\epsilon(t) := \gamma(0)\ \forall t \in [0,1]$*
Dann ist $\epsilon * \gamma$ $rel\{0,1\}-$homotop zu γ

Beweis. $\epsilon * \gamma = \gamma \circ \varphi$ mit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ definiert durch

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0 & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ 2s-1 & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

und die Behauptung folgt aus dem vorherigen Lemma, da φ stetig ist und $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1$ $\square$

Lemma 12.4. *Sei $\gamma : [0,1] \to X$ stetig und $\overline{\gamma} : [0,1] \to X$ definiert durch $\overline{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$*
Dann ist $\gamma * \overline{\gamma}$ $rel\{0,1\}-$homotop zu $\epsilon_{\gamma(0)}$

Beweis. Definiere $h : [0,1] \times I \to X$ durch

$$h(s,t) = \begin{cases} \gamma(2st) & 0 \le s \le \frac{1}{2}\ t \in I \\ \overline{\gamma}(2ts + 1 - 2t) & \frac{1}{2} \le s \le 1\ t \in I \end{cases}$$

d.h. h_t durchläuft γ von $\gamma(0)$ bis $\gamma(t)$ und dann wieder zurück, anschaulich ist klar, dass dies die gewünschte Homotopie liefert. Genauer:
$h_t(0) = h(0,t) = \gamma(0)\ \forall t \in I$ und $h_t(1) = h(1,t) = \overline{\gamma}(1) = \gamma(0)\ \forall t \in I$
Außerdem $h(s,0) = \gamma(0)\ \Rightarrow h_0 = \epsilon_{\gamma(0)}$ und

$$h(s,1) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \overline{\gamma}(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = \gamma * \overline{\gamma}(s) \ \Rightarrow\ h_1 = \gamma * \overline{\gamma}$$

Die Stetigkeit von h folgt wie üblich mit Satz 3.5, damit ist h die gesuchte Homotopie zwischen $\epsilon_{\gamma(0)}$ und $\gamma * \overline{\gamma}$ $\square$

Lemma 12.5. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$*
Dann gilt:

$$\gamma_1 \sim_{rel\{0,1\}} \gamma_2 \iff \gamma_1 * \overline{\gamma_2} \sim_{rel\{0,1\}} \epsilon_{\gamma_1(0)}$$

Beweis. Auch diese Aussage erscheint intuitiv sehr klar zu sein, benötigt aber im Beweis einiges an Technik.
" $\Rightarrow$ " Sei $h : [0,1] \times I \to X$ eine $rel\{0,1\}-$Homotopie von γ_1 nach γ_2. Definiere nun $H : [0,1] \times I \to X$

$$H(s,t) := \begin{cases} h(3ts, 0) & 0 \le s \le \frac{1}{3}\ t \in I \\ h(t, 3s-1) & \frac{1}{3} \le s \le \frac{2}{3}\ t \in I \\ h(3t - 3ts, 1) & \frac{2}{3} \le s \le 1\ t \in I \end{cases}$$

Die Idee ist hierbei, dass man h_0 bis $h_0(t)$ durchläuft, dann längs der Homotopie von $h_0(t)$ nach $h_1(t)$ und dann von $h_1(t)$ nach $h_1(0)$.
Man zeigt nun leicht, dass $H_0 = \epsilon_{\gamma_1(0)}$ ist, sowie $H(0,t) = H(1,t) = \gamma_1(0)\ \forall t \in I$ und H stetig ist.
Es gilt

$$H_1(s) := \begin{cases} h(3s,0) & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ h(1,3s-1) & \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ h(3-3s,1) & \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

und man sieht leicht, dass $H_1 = (\gamma_1 * \overline{\gamma_2}) \circ \varphi$ mit $\varphi(s) = \begin{cases} \frac{3}{2}s & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}s - \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$ ist.
Dabei ist φ wie in 12.2, also ist $H_1 \sim \gamma_1 * \overline{\gamma_2}$ und damit $\epsilon_{\gamma_1(0)} \sim H_1 \sim \gamma_1 * \overline{\gamma_2}$ und die Behauptung folgt aus der Transitivität von $\sim$

" $\Leftarrow$ " Sei nun $h : [0,1] \times I \to X$ eine $rel\{0,1\}-$Homotopie von $\gamma_1 * \overline{\gamma_2}$ nach $\epsilon_{\gamma_1(0)}$
Es sei dann $H : [0,1] \times I \to X$ mit

$$H(s,t) := \begin{cases} h(s,t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}\ t \in I \\ h(\frac{1}{2}, (2-2t)s + 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1\ t \in I \end{cases}$$

d.h. man durchläuft h_t bis zur Mitte $h_t(\frac{1}{2})$ und läuft dann längs der Homotopie von $h_t(\frac{1}{2})$ nach $h_1(\frac{1}{2})$
Es ist H_0 eine Umparametrisierung von $\sigma : s \in [0,1] \to H(\frac{1}{2}, s)$, und H_1 eine Umparametrisierung von γ_1
Da H außerdem stetig ist und feste Anfangs- und Endpunkte hat, folgt hieraus, dass $\gamma_1 \sim_{rel\{0,1\}} \sigma$ ist.
Analog zeigt man mittels

$$K(s,t) := \begin{cases} h(1-s,t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}\ t \in I \\ h(\frac{1}{2}, (2-2t)s + 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1\ t \in I \end{cases}$$

dass $\gamma_2 \sim_{rel\{0,1\}} \sigma$ gilt.
Und damit folgt $\gamma_1 \sim_{rel\{0,1\}} \gamma_2$ □

Lemma 12.6. *Seien $\gamma, \sigma, \tau : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma(1) = \sigma(0)$ und $\sigma(1) = \tau(0)$
Dann gilt $(\gamma * \sigma) * \tau \sim_{rel\{0,1\}} \gamma * (\sigma * \tau)$*

Beweis. Es gilt:

$$(\gamma * \sigma) * \tau = \begin{cases} \gamma(4s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \sigma(4s-1) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\gamma * (\sigma * \tau) = \begin{cases} \gamma(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(4s-2) & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ \tau(4s-3) & \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Definiere $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ durch

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ s + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(s+1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

dann ist φ stetig und $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1$ und es ist $(\gamma * (\sigma * \tau))(\varphi(s)) = ((\gamma * \sigma) * \tau)(s)$
Also folgt die Behauptung mit 12.2 $\square$

Damit haben wir alle Eigenschaften zusammen um nun die Fundamentalgruppe zu definieren. Zunächst benötigen wir

Definition 12.7. *Sei $x_0 \in X$. Ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$ (es sei daran erinnert, dass γ ein Weg ist $\Leftrightarrow \gamma$ stetig ist) heißt* ***Schleife*** *oder geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt x_0*
$:\Leftrightarrow\ \gamma(0) = \gamma(1) = x_0$

$$\Omega(X, x_0) := \{\gamma \mid \gamma : X[0,1] \to X \ \textit{stetig}\ , \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$$

Bemerkung:

(i.) Sei γ eine Schleife, dann induziert γ eine Abbildung $\gamma' : \frac{[0,1]}{\{0,1\}} \to X$ mit $\gamma'([t]) = \gamma(t)$

(ii.) $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X, x_0) \ \Rightarrow\ \gamma_0 * \gamma_1 \in \Omega(X, x_0)$ deshalb könnte man erwarten, dass " $*$ " eine Gruppenstruktur auf $\Omega(X, x_0)$ induziert, allerdings ist " $*$ " nicht assoziativ und es existiert i.a. auch kein neutrales Element.

(iii.) $rel\{0,1\}-$Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf $\Omega(X, x_0)$ (vgl. Bemerkung bei 11.4) und damit ist es sinnvoll die Menge der Äquivalenzklassen

$$\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0)/_{\sim_{\{0,1\}}}$$

zu betrachten.

Folgerung 12.8. *Seien $[\gamma_0], [\gamma_1] \in \pi_1(X, x_0)$, dann ist*

$$[\gamma_0] \cdot [\gamma_1] := [\gamma_1 * \gamma_2] \in \pi_1(X, x_0)$$

wohldefiniert und liefert eine Verknüpfung auf $\pi_1(X, x_0)$

Beweis. 12.1 $\square$

Satz 12.9. *Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Dann ist $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ eine Gruppe, die* ***Fundamentalgruppe von X zum Basispunkt*** *x_0*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass " $\cdot$ " Linksneutrale und Linksinverse Elemente besitzt, und " $\cdot$ " assoziativ ist.
Sei $e := [\epsilon_{x_0}]$, wobei ϵ_{x_0} die konstante Schleife in x_0 ist, dann folgt mit (12.3), dass e ein Linksneutrales Element in $\pi_1(X, x_0)$ ist.
Nach (12.4) gilt außerdem:

$$[\overline{\gamma}] \cdot [\gamma] = [\overline{\gamma} * \gamma] = [\overline{\gamma} * \overline{\overline{\gamma}}] = [\epsilon_{x_0}] = e$$

also ist $[\overline{\gamma}]$ ein Linksinverses Element.
Die Assoziativität folgt direkt aus (12.6), denn

$$[\gamma] \cdot ([\sigma] \cdot [\tau]) = [\gamma] \cdot [\sigma * \tau] = [\gamma * (\sigma * \tau)] \overset{(12.6)}{=} [(\gamma * \sigma) * \tau] = \ldots = ([\gamma] \cdot [\sigma]) \cdot [\tau]$$

Damit folgt die Behauptung $\square$

Satz 12.10. *Sei $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetig, so ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ f_*([\gamma]) &:= [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus.
(Wir schreiben auch f_{*,x_0} für f_*, wenn wir den Basispunkt sichtbar machen wollen)

Beweis. Seien $[\gamma_1] = [\gamma_2] \Rightarrow [f \circ \gamma_1] = [f \circ \gamma_2]$ nach (11.5) $\Rightarrow$ f_* wohldefiniert.
Weiter ist

$$\begin{aligned} f_*([\gamma] \cdot [\sigma]) &= f_*([\gamma * \sigma]) = [f \circ (\gamma * \sigma)] = [(f \circ \gamma) * (f \circ \sigma)] = [f \circ \gamma] \cdot [f \circ \sigma] \\ &= f_*([\gamma]) \cdot f_*([\sigma]) \end{aligned}$$

□

Folgerung 12.11. *(i.) $(id_{(X,x_0)})_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$*

(ii.) Falls $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ mit f, g stetig, dann gilt

$$\Rightarrow \ (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

(genauer $(g \circ f)_{*,x_0} = g_{*,y_0} \circ f_{*,x_0}$)

Beweis. zu (i.):

$$(id_X)_*([\gamma]) = [id_X \circ \gamma] = [\gamma]$$

zu (ii.):

$$(g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = g_*([f \circ \gamma]) = g_*(f_*([\gamma]) = (g_* \circ f_*)([\gamma])$$

□

12.2 Die Rolle des Basispunkts x_0

Wir wollen nun genauer untersuchen welche Rolle der Basispunkt der Fundamentalgruppen spielt, es wird sich zeigen, dass für alle x, die in einer Wegzusammenhangskomponente von X liegen, die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ zueinander isomorph sind.

Satz 12.12. *Sei $\gamma : [0, 1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = x_0$ nach $\gamma(1) = x_1$. Dann ist*

$$\begin{aligned} J_\gamma : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ J_\gamma([\sigma]) &:= [(\overline{\gamma} * \sigma) * \gamma] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. (mit Inversem $J_{\overline{\gamma}}$)

Beweis. (i) Wohldefiniertheit von J_γ:
offensichtlich ist $(\overline{\gamma} * \sigma) * \gamma \in \Omega(X, x_1) \Rightarrow J_\gamma([\sigma]) \in \pi_1(X, x_1)$
falls $\sigma \sim_{rel\{0,1\}} \sigma' \Rightarrow (\overline{\gamma} * \sigma) * \gamma \sim_{rel\{0,1\}} (\overline{\gamma} * \sigma') * \gamma$ nach (12.1)
$\Rightarrow \ J_\gamma([\sigma]) = J_\gamma([\sigma'])$
Also ist J_γ wohldefiniert.

(ii.) Z.z. : J_γ ist Homomorphismus. Seien $[\sigma],[\tau] \in \pi_1(X,x_0)$:

$$\begin{aligned}J_\gamma([\sigma]\cdot[\tau]) &= J_\gamma([\sigma*\tau]) = [(\overline{\gamma}*(\sigma*\tau))*\gamma] \overset{(a)}{=} [((\overline{\gamma}*(\sigma*(\gamma*\overline{\gamma})))*\tau)*\gamma]\\ &\overset{(b)}{=} [((\overline{\gamma}*\sigma)*\gamma)*((\overline{\gamma}*\tau)*\gamma)] = [(\overline{\gamma}*\sigma)*\gamma]\cdot[(\overline{\gamma}*\tau)*\gamma]\\ &= J_\gamma([\sigma])\cdot J_\gamma([\tau])\end{aligned}$$

Die Schritte (a) und (b) folgen beide indem man (12.6) und (12.1) mit entsprechender Sorgfalt anwendet und sollen hier der Übersichtlichkeit zuliebe nicht exakt ausgeführt werden. (Achtung beim auseinanderziehen der [.] Klammern, dies geht nur wenn jeweils zwei geschlossene Wege drinstehen!)

zu (iii.): $J_{\overline{\gamma}}$ ist invers zu J_γ:

$$\begin{aligned}J_{\overline{\gamma}}\circ J_\gamma([\sigma]) &= [(\overline{\overline{\gamma}}*((\overline{\gamma}*\sigma)*\gamma))*\overline{\gamma}] = [(\gamma*\overline{\gamma})*(\sigma*(\gamma*\overline{\gamma}))]\\ &\underbrace{[\gamma*\overline{\gamma}]}_{e}\cdot([\sigma]\cdot\underbrace{[\gamma*\overline{\gamma}]}_{e}) = [\sigma]\\ &\Rightarrow\ J_{\overline{\gamma}}\circ J_\gamma = id_{\pi_1(X,x_0)}\end{aligned}$$

Und damit auch
$J_\gamma \circ J_{\overline{\gamma}} = J_{\overline{\overline{\gamma}}} \circ J_{\overline{\gamma}} = id_{\pi(X,x_1)}$
$\Rightarrow\ J_{\overline{\gamma}} = J_\gamma^{-1}$ □

Folgerung 12.13. *Ist X wegzusammenhängend, so sind für alle $x_0 \in X$ die Fundamentalgruppen $\pi_1(X,x_0)$ zueinander isomorph.*
Die Isomorphieklasse dieser $\pi_1(X,x_0)$ nennt man oft kurz " die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ von X "
(Etwa für $X = S^1 : \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ bedeutet $\forall x \in S^1 :\ \pi_1(S^1,x) \simeq \mathbb{Z}$)

Beispiel 12.14. $X = \{x_0\} \Rightarrow \Omega(X,x_0) = \{\epsilon_{x_0}\}\ \Rightarrow\ \pi_1(X,x_0) = \{e\}$

Definition 12.15. *Zwei Schleifen $\gamma_1,\gamma_2 : [0,1] \to X$ heißen **geschlossen homotop** falls eine stetige Abbildung $h : [0,1]\times I \to X$ existiert, für die gilt:*
$h(0,t) = h(1,t)\ \forall t \in I$ sowie $h(s,0) = \gamma_1(s),\ h(s,1) = \gamma_2(s)\ \forall s \in [0,1]$
Natürlich ist 'geschlossen homotop' eine Äquivalenzrelation und ist schwächer als $rel\{0,1\}-$homotop.

Definition 12.16. *(i.) Eine Schleife $\gamma : [0,1] \to X$ heißt **zusammnenziehbar in** X falls ein $x \in X$ und eine geschlossene Homotopie h existieren mit $h_0 = \gamma$ und $h_1 = \epsilon_x$.*

*(ii.) X heißt **einfach zusammenhängend**, falls X ein wegzusammenhängender Raum ist und jede Schleife in X zusammenziehbar ist.*

Bemerkung: Sei $\gamma : [0,1] \to X$ eine Schleife, dann ist die Abbildung $\gamma' : \frac{[0,1]}{\{0,1\}} \to X,\ \gamma'([t]) := \gamma(t)$ wohldefiniert und stetig.

Folgerung 12.17. *Eine Schleife $\gamma : [0,1] \to X$ ist zusammenziehbar $\Leftrightarrow \exists$ ein $x \in X$ und eine Homotopie $h' : \frac{[0,1]}{\{0,1\}} \times I \to X$ mit $h'_0 = \gamma'$ und $h'_1 = \epsilon'_x$*

Beweis. $\Rightarrow$ " Sei h die Homotopie aus (12.16) und $h'([s],t) := h(s,t)$, dann ist h' wohldefiniert und es gilt $h' \circ (\pi, id_I)$, wobei $\pi : [0,1] \to \frac{[0,1]}{\{0,1\}}$ die übliche Projektion ist.
Damit ist h', nach der Definition der Quotiententopologie, stetig. (Zeigt man mit einem analogen Argument wie in Satz 10.7 (i.))
Und es ist offensichtlich $h'_0 = \gamma'$ und $h'_1 = \epsilon'_x$

" $\Leftarrow$ " Sei h' wie in der Behauptung, dann definiert $h := h' \circ (\pi, id_I)$ die gesuchte Abbildung aus (12.16). □

Bemerkung: Sei $Y \cong \frac{[0,1]}{\{0,1\}}$ und $f : Y \to \frac{[0,1]}{\{0,1\}}$ der Homöomorphismus. Dann ist die zu einer Schleife $\gamma : [0,1] \to X$ definierte Abbildung $\widetilde{\gamma} : Y \to X$ durch $\widetilde{\gamma}(y) := \gamma'(f(y))$ wohldefiniert und stetig.

Folgerung 12.18. *Eine Schleife $\gamma : [0,1] \to X$ ist zusammenziehbar $\Leftrightarrow \exists$ ein $x \in X$ und eine Homotopie $\widetilde{h} : Y \times I \to X$ mit $\widetilde{h}_0 = \widetilde{\gamma}$ und $\widetilde{h}_1 = \widetilde{\epsilon_x}$*

Beweis. $\Rightarrow$ Definiere $\widetilde{h}(y,1) := h'(f(y),t)$
$\Leftarrow$ Definiere $h'([s],t) := \widetilde{h}(f^{-1}([s]),t)$ □

Beispiel 12.19. *In der letzten Folgerung sind besonders die Fälle $Y = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, bzw $Y = S^1 \subseteq \mathbb{C}$ von Bedeutung. Man parametrisiert also den Weg durch den Rand des Einheitskreises.*
Zum Beispiel, wenn $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ den Rand eines Rechteckes der Seitenlänge 1 und Mittelpunkt 0, von $(\frac{1}{2},0)$ aus startend, einmal umläuft, dann ist $\widetilde{\gamma} : S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\widetilde{\gamma}(y) := \frac{1}{2||y||_\infty} y$ wobei $||.||_\infty$ die Maximusnorm im $\mathbb{R}^2$ ist.

Das genaue Aussehen von $\widetilde{\gamma}$ ist aber nicht wichtig um (12.18) anzuwenden, man benötigt nur, dass $\widetilde{\gamma}$ als der Rand einer stetigen Abbildung aufgefasst werden kann. (Genauer im Lemma 12.22)

Wir werden nun zeigen, dass man x in der Definition der Zusammenziehbarkeit direkt als $\gamma(0)$ setzen kann.

Satz 12.20. *Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:*
Eine Schleife γ ist in X zusammenziehbar $\Leftrightarrow$ $\gamma \sim_{rel\{0,1\}} \epsilon_{\gamma(0)}$

Beweis. " $\Rightarrow$ "
Sei $x_0 \in X$ beliebig.
Sei $\gamma \in \Omega(X,x_0)$, $x \in X$ und h eine geschlossene Homotopie von γ nach ϵ_x.
Definiere $\sigma : [0,1] \to X,\ \sigma(t) := h(0,t)$
Dies ist dann ein Weg von x_0 nach x und es sei $\sigma_t : [0,1] \to X,\ \sigma_t(s) := \sigma(ts)$
Wir definieren $k : [0,1] \times I \to X$ durch $k_t = (\sigma_t * h_t) * \overline{\sigma_t}$, genauer:

$$k(s,t) = \begin{cases} h(0,4st) & 0 \le s \le \frac{1}{4}\ t \in I \\ h(4s-1,t) & \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2}\ t \in I \\ h(0,t(2-2s)) & \frac{1}{2} \le s \le 1\ t \in I \end{cases}$$

Da h_t geschlossen ist, ist dies wohldefiniert. Dann sieht man leicht, dann $k(0,t) = x_0 = k(1,t)\ \forall t \in I$ und k_0 bzw. k_1 sind Umparametrisierungen von γ bzw $\sigma * \overline{\sigma}$
Es gilt

$$\epsilon_{x_0} \sim_{rel\{0,1\}} \sigma * \overline{\sigma} \sim_{rel\{0,1\}} k_1 \sim_{rel\{0,1\}} k_0 \sim_{rel\{0,1\}} \gamma$$

" $\Leftarrow$ " Sei γ eine Schleife in X mit $\gamma(0) = x$, dann gilt $\gamma \sim_{rel\{0,1\}} \epsilon_x$ und damit ist sie insbesondere zusammenziehbar. □

Folgerung 12.21. *(i.) Sei X topologischer Raum, dann gilt: Jede Schleife γ in X ist zusammenziehbar $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X:\ \pi_1(X,x) = \{e\}$*

(ii.) Sei X wegzusammenhängend, dann gilt:
X einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\exists x_0 \in X:\ \pi_1(X,x_0) = \{e\}$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X:\ \pi_1(X,x) = \{e\}$

Beweis. zu (i.): Das folgt unmittelbar aus (12.20)

zu (ii.): Nach (i.) gilt X einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X:\ \pi_1(X,x) = \{e\}$
Natürlich gilt $\forall x \in X:\ \pi_1(X,x) = \{e\} \Rightarrow \exists x_0 \in X:\ \pi_1(X,x_0) = \{e\}$
Wir zeigen die Umkehrung:
Sei $\pi_1(X,x_0) = \{e\}$ und $x \in X$ beliebig, dann existiert ein Weg γ von x_0 nach x und $\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,x_0)$ via J_γ nach (12.12) □

Das folgende Lemma gibt ein Kriterium für die Zusammenziehbarkeit einer Schleife.

Lemma 12.22. *Sei $|.|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$*
Weiter sei $\gamma : [0,1] \to X$ eine Schleife und $\widetilde{\gamma} : S^1 \to X$ wie in Folgerung 12.18 und sei $B^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 | |x| < 1\}$
Dann gilt

$$\gamma \text{ ist zusammenziehbar } \Leftrightarrow \exists f : \overline{B^2} \to X \text{ stetig, mit } f_{|S^1} = \widetilde{\gamma}$$

Beweis. " $\Leftarrow$ " Definiere $H : S^1 \times I \to X$ durch $H(x,t) := f(tx)$, dann ist diese Abbildung stetig mit $H_1 = \widetilde{\gamma}$ und $H_0 \equiv f(0)$ also nach (12.18) ist γ zusammenziehbar.

" $\Rightarrow$ " Nach (12.18) existiert $h : S^1 \times I \to X$ und ein $x \in X$ mit $h_0 = \widetilde{\gamma}$ und $h_1 = \widetilde{\epsilon_x}$
Nun kann man jedes $y \in \overline{B^2}$ eindeutig, als $y = tx$ mit $x \in S^1 = \partial\overline{B^2}$ und $t \in I = [0,1]$ schreiben. Hierbei ist $y \in S^1 \Leftrightarrow t = 1$
Damit definieren wir nun $f : \overline{B^2} \to X$ als $f(tx) := h(1-t, x)$ stetig und $f_{|S^1} = h_0 = \widetilde{\gamma}$ □

Satz 12.23. *Sei $h : X \times I \to Y$ Homotopie von $h_0 = f$ nach $h_1 = g$. Sei $x_0 \in X$ und $\gamma : [0,1] \to Y$ der Weg $\gamma(t) := h(x_0, t)$ von $\gamma(0) = f(x_0) =: y_0$ nach $\gamma(1) = g(x_0) =: y_1$*
Dann gilt

$$g_{*,x_0} = J_\gamma \circ f_{*,x_0}$$

also

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[rr, "f_{*,x_0}"] \arrow[dr, "g_{*,x_0}"'] & & \pi_1(Y,y_0) \arrow[dl, "J_\gamma"] \\
& \pi_1(Y,y_1) &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. ZZ: $\forall \sigma \in \Omega(X, x_0)$:

$$[(\overline{\gamma} * (f \circ \sigma)) * \gamma] = [g \circ \sigma] \in \pi_1(Y, y_1)$$

Definiere $\gamma_t : [0,1] \to X$ durch $\gamma_t(s) := \gamma(t + s(1-t))$ und
$k_t \in \Omega(Y, y_1)$ durch $k_t := (\overline{\gamma_t} * (h_t \circ \sigma)) * \gamma_t$ dann definiert k_t eine $rel\{0,1\}-$Homotopie von $k_0 = (\overline{\gamma} * (f \circ \sigma)) * \gamma$ nach $k_1 = (\overline{\epsilon_{y_1}} * (g \circ \sigma)) * \epsilon_{y_1}$
Es ist aber $(\overline{\epsilon_{y_1}} * (g \circ \sigma)) * \epsilon_{y_1} \sim_{rel\{0,1\}} g \circ \sigma$, da wieder nur eine Umparametrisierung vorliegt und damit ist

$$(\overline{\gamma} * (f \circ \sigma)) * \gamma = k_0 \sim_{rel\{0,1\}} k_1 \sim_{rel\{0,1\}} g \circ \sigma$$

also folgt die Behauptung. □

Lemma 12.24. *Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$ und $f : X \to Y$ stetig. Dann gilt*

$$f_{*,x_1} = J_{f \circ \gamma} \circ f_{*,x_0} \circ J_{\overline{\gamma}}$$

bzw

$$f_{*,x_1} \circ J_\gamma = J_{f \circ \gamma} \circ f_{*,x_0}$$

Beweis. Sei $\sigma \in \Omega(X, x_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f_{*,x_1}(J_\gamma([\sigma]) =& f_{*,x_1}([(\overline{\gamma} * \sigma) * \gamma]) = [f \circ ((\overline{\gamma} * \sigma) * \gamma)] \\
& [(f \circ \overline{\gamma} * f \circ \sigma) * f \circ \gamma] = [(\overline{f \circ \gamma} * f \circ \sigma) * f \circ \gamma] \\
& = J_{f \circ \gamma}([f \circ \sigma]) = J_{f \circ \gamma}(f_{*,x_0}([\sigma]))
\end{aligned}$$

□

Satz 12.25. *(i.) Ist $f : X \to Y$ Homotopieäquivalenz, so gilt für alle $x_0 \in X$:*

$$f_{*,x_0} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)) \text{ ist ein Isomorphismus}$$

(ii.) X zusammenziehbar $\Rightarrow \forall x_0 \in X : \ \pi_1(X, x_0) = \{e\}$

Beweis. zu (i.): Sei g Homotopieinverses zu f, d.h. $g \circ f \sim_h id_X, \ f \circ g \sim_k id_Y$
Definiere $\gamma : [0,1] \to Y$ durch $\gamma(t) := h(x_0, t)$
Nach (12.23) kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[rr, "(g\circ f)_{*,x_0}"] \arrow[dr, "(id_X)_{*,x_0}=id_{\pi_1(X,x_0)}"'] & & \pi_1(Y, y_0) \arrow[dl, "J_\gamma"] \\
& \pi_1(Y, y_1) &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $(g \circ f)_* = (J_\gamma)^{-1}$ ein Isomorphismus.
$\Rightarrow \ g_* \circ f_*$ ist ein Isomorphismus
$\Rightarrow \ f_{*,x_0}$ ist injektiv, $g_{*,f(x_0)}$ ist surjektiv.
Analog bekommt man natürlich, mit $f \circ g \sim_k id_Y$, dass $g_{*,f(x_0)}$ injektiv und $f_{*,g(f(x_0))}$ surjektiv ist.
Definiere nun $\gamma'(t) := h(x_0, 1-t)$. Dann ist dies ein Weg von x_0 nach $g \circ f(x_0)$ und wie erhalten mit (12.24)

$$(J_{f\circ\gamma'})^{-1} \circ f_{*,g(f(x_0))} \circ J_{\gamma'} = f_{*,x_0}$$

Also ist insbesondere f_{*,x_0} surjektiv, da $f_{*,g(f(x_0))}$ surjektiv ist.
Damit ist f_{*,x_0} bijektiv, also ein Isomorphismus.

zu (ii.): X ist homotopieäquivalent zu einem 1-Punkt-Raum. Die Fundamentalgruppe eines solchen Raumes ist automatisch trivial. Nach (i.) existiert ein Isomorphismus von $\pi_1(X, x_0)$ in die triviale Gruppe. Dann muss $\pi_1(X, x_0)$ aber selbst trivial sein. □

Folgerung 12.26. *(i.) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig $\Rightarrow \ \forall x_0 \in X : \ \pi_1(X, x_0) = \{e\}$*

(ii.) Sei M das Möbiusband, dann ist

$$\pi_1(S^1 \times [-1, 1]) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \pi_1(M)$$

(iii.) Sei $p \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dann ist $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}) = \pi_1(S^{n-1})$

Beweis. zu (i.): X sternförmig $\Rightarrow$ X zusammenziehbar

zu (ii.),(iii.): Wir haben gezeigt, dass alle vorkommenden Räume homotopieäquivalent sind. Basispunkte können wegen des Wegzusammenhangs weggelassen werden. □

Bemerkung:

(i.) Eine wegzusammenhängende, zusammenziehbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend. (folgt aus (12.25) (ii.) und 12.21 (ii.))

(ii.) Man zeigt in der Funktionentheorie, mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes, dass die einfach zusammenhängenden, offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ genau die offenen, wegzusammenhängenden Teilmengen sind auf denen alle holomorphen Funktionen Stammfunktionen besitzen (Elementargebiete)
D.h. dass die topologische Eigenschaft des einfachen Zusammenhangs mit der analystischen Eigenschaft eine Stammfunktion zu besitzen übereinstimmt.

13 Lokale Produkte und Überlagerungen

In disem Kapitel werden wir uns eingehend mit sogenannten lokalen Produkten und Überlagerungen beschäftigen, die es einem beispielsweise ermöglichen Umlaufzahlen und komplexe Logarithmen zu definieren.

13.1 Lokale Produkte

Definition 13.1. *Sei $\pi : Y \to X$ stetig. $\pi : Y \to X$ heißt* ***lokales Produkt*** *(oder: lokal triviale Faserung)*
:⇔ $\forall x \in X$ $\exists$ offene Umgebung U von x, ein topologischer Raum $F = F_U \neq \emptyset$ und ein Homöomorphismus
$h = h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ mit $p_1 \circ h = \pi_{|\pi^{-1}(U)}$
(es ist $p_1 : U \times F \to U,\ p_1(u, f) = u$)
Dass heißt:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
$F_x := \pi^{-1}(x) \subseteq Y$ heißt ***Faser von*** *π* ***über*** *x*

Bemerkung: $h_{|F_x} : F_x \to \{x\} \times F$ ist $\forall x \in U$ ein Homöomorphismus.
Insbesondere heißt dies, dass jede Faser F_x eines $x \in U$ homöomorph zu F_U ist.

Definition 13.2. *Ein lokales Produkt heißt* ***trivial*** *oder* ***global***
⇔ $\exists$ ein topologischer Raum F und ein Homöomorphismus $h : Y \to X \times F$ mit $p_1 \circ h = \pi$

Bemerkung: Hier ist $X = U$ also sind insbesondere alle Fasern homöomorph. Es stellt sich die Frage ob auch bei lokalen Produkten alle Fasern homöomorph sein können und falls ja, unter welcher Voraussetzung.

Lemma 13.3. *Ist $\pi : Y \to X$ ein lokales Produkt und ist X zusammenhängend, so sind je 2 Fasern von π homöomorph.*

Beweis. Wähle ein $x_0 \in X$ fest und setze $V_0 = \{x \in X \mid F_x \cong F_{x_0}\}$ und $V_1 = X \setminus V_0$
Dann sind V_0, V_1 offen, denn sei $x \in V_0$, dann wähle die Umgebung U aus der Definition des lokalen Produktes und man erhält $F_x \cong F_{x_0}$ $\forall x \in U$, also $U \subseteq V_0$
Analog für V_1
Aber es ist $x_0 \in V_0$ also gilt wegen des Zusammenhangs $V_0 = X$ □

Bemerkung:

(i.) Sei X zusammenhängend und $\pi : Y \to X$ stetig, $x_0 \in x$ beliebig, aber fest, sowie $F := \pi^{-1}(x_0)$. Dann gilt wegen der Homöomorphie aller Fasern, dass π ein lokales Produkt ist ⇔ $\forall x \in X$ $\exists$ offene Umgebung U von x und ein Homöomorphismus $h = h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ mit $p_1 \circ h = \pi_{|\pi^{-1}(U)}$

D.h. also, dass der topologische Raum F fest gewählt werden kann.
Insbesondere reicht es, wenn man zeigen will, dass man ein lokales Produkt vorliegen hat, einen Homöomorphismus von $\pi^{-1}(U)$ nach $U\times$(eine beliebige Faser) zu konstruieren und wenn es einen solchen nicht gibt, kann π auch kein lokales Produkt sein.

(ii.) Da bei globalen Produkten sowieso alle Fasern homöomorph sind gilt dort (i.) auch ohne den Zusammenhang.

Beispiel 13.4. *(i.)* $\pi = p_1 : S^1 \times [0,1] \to S^1$ *ist offensichtlich ein globales Produkt mit Faser* $[0,1]$

(ii.) $\pi : M \to \frac{[0,1]}{\{0,1\}}$ *wobei* M *das Möbiusband und* $\pi([x,y]) = [x]$ *ist, ist ein lokales, aber kein globales, Produkt.*

(iii.) $\pi : O(n) \to O(n)/_{O(k)\times O(n-k)} \cong G(n,k)$ *ist lokales Produkt mit Faser* $O(k) \times O(n-k)$

(iv.) $\pi : S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \to S^3/_R \cong S^2$ *wobei* $z \sim w :\Leftrightarrow\ \exists \lambda \in S^1 \subseteq \mathbb{C} :\ z = \lambda w$ *ist ein lokales Produkt mit Faser* S^1 *(nicht global)*

(v.) $Y := TS^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid x \in S^2, \langle x,y \rangle = 0\}$ $\pi : Y \to S^2$ *mit* $\pi(x,y) = x$ *(Tangentialbündel von* S^2*) ist ein lokales, nicht globales, Produkt mit Faser* $\mathbb{R}^2$

Beweis. (Skizzen) zu (ii.): Wir zeigen nur, dass π kein globales Produkt ist. Jede Faser $\pi^{-1}([x]) = \{[(x,y)] \mid y \in [0,1]\}$ ist homöomorph zu $[0,1]$. Um zu zeigen, dass π kein globales Produkt ist reicht es also (vgl Bemerkung vor dem Beispiel) zu zeigen, dass kein Homöomorphismus $h : M \to \frac{[0,1]}{\{0,1\}} \times [0,1]$ mit $p_1 \circ h = \pi$ existieren kann.
Angenommen es gibt solch eine h, dann existiert ein $f : M \to [0,1]$ Homöomorphismus ($f = p_2 \circ h$) Eine solche Abbildung existiert aber nicht. (Übung)

zu (iv.): Wäre π global, dann wäre $S^3 \cong S^2 \times S^1$
Dies kann nicht sein denn es gilt (ohne Beweis) $\pi_1(S^3) = \{e\}$ aber $\pi_1(S^2 \times S^1) \simeq \pi_1(S^2) \times \pi_(S^1) = \{e\} \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$
(Wir werden später noch $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ zeigen.)

zu (v.): Wäre π ein globales Produkt wäre $TS^2 \cong S^2 \times \mathbb{R}^2$ was einen Widerspruch zum Satz vom Igel ergibt, der besagt, dass es kein stetiges Vektorfeld auf S^2 ohne Nullstelle gibt. □

13.2 Überlagerungen

Definition 13.5. *Eine Menge* I *mit* $\mathscr{O}_I = \mathscr{P}(I)$ *heißt diskreter topologischer Raum.*

Definition 13.6. $\pi : Y \to X$ *stetig, heißt Überlagerung, falls* $\forall x \in X$ *eine offene Umgebung* U *von* x*, ein diskreter topologischer Raum* $I = I_U$*, sowie ein Homöomorphismus* $h = h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times I$ *existiert, so dass*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times I \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Lemma 13.7. *Sei* π *stetig. Dann sind äquivalent*

(i.) π *ist eine Überlagerung*

(ii.) π *ist lokales Produkt und jede Faser* $\pi^{-1}(x) \subseteq Y$ *ist ein nichtleerer diskreter topologischer Raum.*

(iii.) $\forall x \in X \; \exists$ *offene Umgebung* U *von* x, *eine Indexmenge* $I \neq \emptyset$ *und für alle* $i \in I$ *offene Mengen* $U_i \subseteq \pi^{-1}(U) \subseteq Y$, *so dass gilt*

$$\begin{aligned} &(a.) \; \bigcup_{i\in I} U_i = \pi^{-1}(U) \\ &(b.) \; U_i \cap U_j = \emptyset, \; i \neq j \\ &(c.) \; \forall i \in I: \; \pi_{|U_i} : U_i \to U \text{ ist ein Homöomorphismus} \end{aligned}$$

Dabei ist die Indexmenge in (iii.) gleich dem topologischen Raum in (i.) und (ii.)

Beweis. Es sollen nur ein paar Hinweise zu "(i.) $\Rightarrow$ (iii.)" gegeben werden.
Ist π eine Überlagerung so gilt $\forall i \in I: \; U \times \{i\} \subseteq U \times I$ offen und da $h : \pi^{-1}(U) \to U \times I$ ein Homöomorphismus ist, sind die $U_i := h^{-1}(U \times \{i\})$ offen und es gilt $\pi^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$
Diese sind disjunkt und es gilt für $\pi_{|U_i} : U_i \to U$, dass $\pi_{|U_i} = ((p_1)_{|U\times\{i\}}) \circ (h_{|U_i})$ ist.
Also ist $\pi_{|U_i}$ ein Homöomorphismus. $\square$

Definition 13.8. *Ist* X *zusammenhängend, so ist* $\#I$ *unabhängig von* x *(nach (13.3)) und heißt dann* ***Blätterzahl der Überlagerung***

Beispiel 13.9. *(i.) Wir betrachten den homogenen Raum* $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \cong S^1$ *und die kanonische Projektion* $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}, \; \pi(x) = [x] = x + \mathbb{Z}$
Dies ist eine ∞*-blätrrige Überlagerung.*

(ii.) Die Abbildung $h : \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}, \; h(t) := e^{2\pi i t}$ *ist eine* ∞*-blättrige Überlagerung.*
Genauso ist auch $h : \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}, \; h(t) := e^{it}$ *eine* ∞*-blättrige Überlagerung.*

(iii.) Betrachte die Operation von $\{\pm id_{S^n}\}$ *auf* S^n *und den zugehörigen Bahnenraum* $S^n/_{\{\pm id_{S^n}\}} \cong \mathbb{R}P^n$
Sei die Abbildung $\pi : S^n \to S^n/_{\{\pm id_{S^n}\}}, \; \pi(x) = [x] = \{-x, x\}$ *gegeben, dann ist diese eine 2-blättrige Überlagerung.*

(iv.) Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
Dann ist $\pi_n : S^1 \subseteq \mathbb{C} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}, \; \pi_n(z) = z^n$ *eine* $n-$*blättrige Überlagerung.*
(Diese Abbildung entspricht der Abbildung $\pi : \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}, \; \pi([x]) = [nx]$*)*

(v.) Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ist eine* ∞*-blättrige Überlagerung.*

Beweis. zu (i.): Sei $[x] \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$. Wähle beispielsweise

$$U := (\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}) \setminus \{[x + \frac{1}{2}]\} = \pi((x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$$

Dies ist offen, da π nach (10.31) eine offene Abbildung ist und es gilt

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (x + i - \frac{1}{2}, x + i + \frac{1}{2})$$

und

$$\pi_{|(x+i-\frac{1}{2}, x+i+\frac{1}{2})} : (x + i - \frac{1}{2}, x + i + \frac{1}{2}) \to U$$

ist bijektiv, stetig und offen, also ein Homöomorphismus.

zu (ii.): Genauso wie (i.). U ist in beiden Fällen einfach das Bild von U aus (i.) unter dem Homöomorphismus $f : \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \to S^1, \; [x] \to e^{2\pi x}$

zu (iii.): Zu $x \in S^n$ sei $H_x := \{y \in S^n \mid \langle y, x\rangle > 0\}$, d.h. die offene Halbsphäre mit Mittelpunkt x
Sei $[x] \in S^n/_{\{\pm id_{S^n}\}}$ und $U := \pi(H_x)$ dann ist U offen und $\pi^{-1}(U) = H_x \cup H_{-x}$ disjunkt.
Außerdem ist

$$\pi_{|H_{\pm x}} : H_{\pm x} \to U$$

bijektiv, stetig und offen.
Die Bijektivität ist klar, die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit von π und die Offenheit aus der Offenheit von π.
(π ist offen, da für $V \subseteq S^n$ offen, gilt: $\pi^{-1}(\pi(V)) = V \cup (-V)$ offen in S^n)

zu (iv.): Idee: Sei $x = e^{i\delta} \in S^1,\ \delta \in [0, 2\pi)$ dann ist die Faser
$F_x = \{e^{i\varphi_n} \mid \varphi_n = \frac{\delta}{n} + k\frac{2\pi}{n},\ k = 0, 1, ..., n-1\}$
Zu $x \in S^1$ wählt man U so klein, dass $\pi^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung offener Umgebungen um die Faserpunkte ist.

zu (v.): Idee: Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z \notin \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(w) < 0,\ \mathrm{Im}(w) = 0\}$, wähle $U = \mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(w) \leq 0,\ \mathrm{Im}(w) = 0\}$
Dann ist $\exp^{-1}(U) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(w) \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)\}$
Im anderen Fall, wähle $U = \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(w) \geq 0,\ \mathrm{Im}(w) = 0\}$, dann ist $\exp^{-1}(U) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(w) \in (2\pi k, 2\pi + 2\pi k)\}$ □

Definition 13.10. *Sei $\pi : Y \to X$ lokales Produkt und $f : Z \to X$ stetig.*
*Eine stetige Abbildung $\widetilde{f} : Z \to Y$ heißt **Hochhebung** oder **Lift** von f nach Y*

$$\Leftrightarrow \ \pi \circ \widetilde{f} = f$$

d.h.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Folgerung 13.11. *Existiert zu f ein Lift, so gilt:*
$\forall z_0 \in Z\ \exists y_0 \in \pi^{-1}(f(z_0))$ mit

$$f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_*(\pi_1(Y, y_0))$$

Beweis. Sei $\widetilde{f}$ ein Lift. Setze $y_0 = \widetilde{f}(z_0)$
Da $\pi \circ \widetilde{f} = f \Rightarrow (\pi \circ \widetilde{f})_* = f_*$ und damit
$\pi_*(\underbrace{\widetilde{f}_*(\pi_1(Z, z_0))}_{\subseteq \pi_1(Y, y_0)}) = f_*(\pi_1(Z, z_0)) \ \Rightarrow\ f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_*(\pi_1(Y, y_0))$ □

Satz 13.12. *Sei $\pi : Y \to X$ lokales Produkt. $\gamma : [0, 1] \to X$ ein Weg und $y_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$*
Dann existiert eine Hochhebung $\widetilde{\gamma} : [0, 1] \to Y$ von γ mit $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$

Beweis. $[0, 1]$ ist kompakt $\Rightarrow \exists 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ und $U_0, ...U_n \subseteq X$ offen mit

(i.) $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subseteq U_k$

(ii.) es existieren topologische Räume F_k und Homöomorphismen $h_k : \pi^{-1}(U_k) \to U_k \times F_k$ mit $p_1 \circ h_k = \pi_{|\pi^{-1}(U_k)}$

Dies ist ein recht typisches Kompaktheitsargument ausgehend davon, dass $[0,1]$ von den Urbildern (unter γ) der U aus Definition 13.1 überdeckt wird. ES wird hier nicht ausgeführt, um den Beweis übersichtlich zu halten.

Es gilt $h_0(y_0) = (\gamma(0), f_0)$ für ein $f_0 \in F_0$
Definiere $\widetilde{\gamma} : [0, t_1] \to \pi^{-1}(U_0) \subseteq Y$
durch

$$\widetilde{\gamma}(t) := h_0^{-1}(\gamma(t), f_0)$$

stetig, mit $\widetilde{\gamma}(0) = h_0^{-1}(\gamma(0), f_0) = y_0$ und
$\pi \circ \widetilde{\gamma}(t) = \pi \circ h_0^{-1}(\gamma(t), f_0) = p_1(\gamma(t), f_0) = \gamma(t)$
Es gilt $h_1(\widetilde{\gamma}(t_1)) = (\gamma(t_1), f_1)$ für ein $f_1 \in F_1$
Definiere $\widetilde{\gamma}_{|[t_1,t_2]}$ durch

$$\widetilde{\gamma}(t) = h_1^{-1}(\gamma(t), f_1)$$

dann ist $\widetilde{\gamma}$ in t_1 wohldefiniert und es ist $\widetilde{\gamma}_{|[t_1,t_2]}$ stetig.
$\Rightarrow$ $\widetilde{\gamma}_{|[0,t_2]}$ stetig und $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$
Nach endlich vielen Schritten ist eine stetige Abbildung $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to Y$ definiert mit $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$ und $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ □

Bemerkung: Im allgemeinen ist $\widetilde{\gamma}$ nicht eindeutig, dazu müsste π eine Überlagerung sein (siehe (13.15))
Beispiel: $Y = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \pi(x,y) = x$ ist ein globales Produkt und es gilt $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ und $\widetilde{\gamma}$ stetig, für jedes $\widetilde{\gamma}$ der Form
$\widetilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), f(t))$ mit stetigem $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

Beispiel 13.13. *(Winkelfunktion)*
Zur Überlagerung $\pi : \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$ mit $\pi(x) = e^{ix}$ und einem Weg $\gamma : [0,1] \to S^1$ existiert eine stetige Winkelfunktion $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$e^{i\varphi(t)} = \gamma(t)\ \forall t \in [0,1]$$

Beispiel 13.14. *Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ stetig, dann existiert $\lambda : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig mit $z_0 + \exp(\lambda(t)) = \gamma(t)$ (da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Überlagerung ist und $\gamma(t) - z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). λ heißt auch der **Logarithmus des Weges** γ.*
Man kann diesen auch konkret konstruieren: Zu $\widetilde{\gamma}(t) = \frac{\gamma(t)-z_0}{|\gamma(t)-z_0|}$ wähle $\varphi(t)$ mit $e^{i\varphi(t)} = \widetilde{\gamma(t)}$ wie im letzten Beispiel. Dann gilt

$$\gamma(t) = z_0 + |\gamma(t) - z_0| e^{i\varphi(t)} = z_0 + e^{\ln(|\gamma(t)-z_0|)} e^{i\varphi(t)} = z_0 + e^{\lambda(t)}$$

mit $\lambda(t) = \ln(|\gamma(t) - z_0|) + i\varphi(t)$.

Satz 13.15. *Sei $\pi : Y \to X$ Überlagerung, $f : Z \to X$ stetig und Z zusammenhängend. Weiter sei $z_0 \in Z$ und $y_0 \in \pi^{-1}(f(z_0))$. Dann existiert höchstens eine Hochhebung $\widetilde{f} : Z \to Y$ von f mit $\widetilde{f}(z_0) = y_0$*

Beweis. Seien $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2$ zwei solche Abbildungen.

$$A := \{z \in Z \mid \widetilde{f}_1(z) = \widetilde{f}_2(z)\} \quad A' = Z \setminus A$$

Wir zeigen, dass A und A' offen sind, dann folgt nämlich mit dem Zusammenhang von Z, dass $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$

Sei $z_1 \in A$, d.h. $\widetilde{f}_1(z_1) = \widetilde{f}_2(z_1)$.
Sei $U \subseteq X$ offene Umgebung von $f(z_1) \in X$ aus der Definition der Überlagerung, dann $\exists i \in I:\ \widetilde{f}_1(z_1) = \widetilde{f}_2(z_1) \in U_i$

Es ist $z_1 \in V := \widetilde{f}_1^{-1}(U_i) \cap \widetilde{f}_2^{-1}(U_i)$ offen, da $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2$ stetig sind.
Es ist dann $(\pi_{|U_i}) \circ ((\widetilde{f}_1)_{|V}) = f_{|V} = (\pi_{|U_i}) \circ ((\widetilde{f}_2)_{|V})$ da $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2$ Lifts sind.
Da $\pi_{|U_i}$ injektiv ist $\Rightarrow\ (\widetilde{f}_1)_{|V} = (\widetilde{f}_2)_{|V} \ \Rightarrow\ V \subseteq A$
$\Rightarrow\ A$ ist offen.

Sei $z_2 \in A' \ \Rightarrow\ \widetilde{f}_1(z_2) \neq \widetilde{f}_2(z_2) \in \pi^{-1}(f(z_2))$
Sei U wieder die Umgebung von $f(z_2)$ aus der Definition der Überlagerung.
Dann existieren $i \neq j$ mit $\widetilde{f}_1(z_2) \in U_i,\ \widetilde{f}_2(z_2) \in U_j$, denn würden $\widetilde{f}_1(z_2),\ \widetilde{f}_2(z_2)$ im gleichen U_i liegen, wäre dies ein Widerspruch zur Injektivität von $\pi_{|U_i}$
Setze $V := \widetilde{f}_1^{-1}(U_i) \cap \widetilde{f}_2^{-1}(U_j)$
Dann gilt $z_2 \in V$ und V ist offen mit $V \subseteq A'$, denn für $z \in V$ gilt:
$\widetilde{f}_1(z) \in U_i,\ \widetilde{f}_2(z) \in U_j$ und $U_i \cap U_j = \emptyset$ also gilt $\widetilde{f}_1(z) \neq \widetilde{f}_2(z) \ \Rightarrow\ z \in A'$
Also ist auch A' offen und es folgt die Behauptung. □

Folgerung 13.16. *Seien π, γ und φ wie in (13.13), dann gilt*

$$\varphi' \text{ ist ein Lift von } \gamma \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z}:\ \varphi' = \varphi + k2\pi$$

Außerdem gilt:
Ist γ zusätzlich geschlossen, so ist

$$\frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)) \in \mathbb{Z}$$

für jeden Lift von γ

Beweis. Wir zeigen zunächst die zweite Aussage.
Da γ geschlossen ist gilt $\exp(i\varphi(1)) = \exp(i\varphi(0))$ und damit nach der Eulerformel:
$\sin(\varphi(0)) = \sin(\varphi(1))$ und $\cos(\varphi(0)) = \cos(\varphi(1))$ und deshalb muss gelten, dass $\varphi(1) - \varphi(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist.

Wir zeigen nun die Äquivalenz:
„ $\Leftarrow$ " Es gilt

$$\exp(i\varphi'(t)) = \exp(i\varphi(t))\exp(2\pi i) = \exp(i\varphi(t)) = \gamma(t)$$

„ $\Rightarrow$ " Es sei also φ' ein Lift $\Rightarrow\ \exp(i\varphi(0)) = \exp(i\varphi'(0)) \Rightarrow \frac{1}{2\pi}(\varphi'(0) - \varphi(0)) \in \mathbb{Z}$ (wie oben)
D.h. $\exists k \in \mathbb{Z}:\ \varphi'(0) = \varphi(0) + k2\pi$
Sei $\widetilde{\varphi}(t) := \varphi(t) + k2\pi$, dann ist $\widetilde{\varphi}$ ein Lift, nach „ $\Leftarrow$ " und es ist $\widetilde{\varphi}(0) = \varphi'(0)$ also gilt $\widetilde{\varphi} = \varphi'$ nach Satz 13.15 und es folgt die Behauptung. □

Bemerkung: In diesem einfachen Beispiel kann die Eindeutigkeit auch ohne Satz 13.15 gezeigt werden, denn es existiert wegen $e^{i\varphi'(t)} = e^{i\varphi(t)}$ zu jedem $t \in [0,1]$ ein $k(t) \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{1}{2\pi}(\varphi'(t) - \varphi(t)) = k(t) \in \mathbb{Z}$. Die linke Seite ist aber stetig in $\mathbb{R}$, woraus folgt, dass $k(t) \equiv k$ fest sein muss.

Folgerung 13.17. *Seien π, γ und φ wie in (13.13) und sei γ nun stückweise stetig differenzierbar, dann ist auch φ stückweise stetig differenziebar und es gilt*

$$\varphi(t) = \frac{1}{i}\int_0^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)}\,d\tau + \varphi(0)$$

Beweis. Definiere $h(t) := \frac{1}{i}\int_0^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)}\,d\tau + \varphi(0),\ t \in [0,1]$
Dann ist h stetig und stückweise stetig differenzierbar.

Weiter sei $g(t) := e^{-ih(t)}\gamma(t)$
Dann gilt auf jedem Teilintervall auf dem h differenzierbar ist:

$$g'(t) = -e^{-ih(t)} \cdot \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \cdot \gamma(t) + e^{-ih(t)} \cdot \gamma'(t) = 0$$

Also ist g konstant auf jedem solchen Teilintervall, da g aber stetig ist, ist g sogar auf $[0,1]$ konstant, also $g(t) \equiv g(0) = e^{-i\varphi(0)} \cdot \gamma(0) = 1$
Dann ist $\gamma(t) = e^{ih(t)}$ und $h(0) = \varphi(0)$ also folgt mit (13.15) $h \equiv \varphi$
$\Rightarrow\ \varphi(t) = \frac{1}{i} \int\limits_0^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)}\, d\tau + \varphi(0)$
Also ist φ stückweise stetig diffbar und die Formel ist gezeigt. □

Satz 13.18. *(Hochheben von homotopien) Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung und $H : Z \times I \to X$ stetig und $\widetilde{f}_1 : Z \to Y$ eine Hochhebung von $f := H_0 : Z \to X$, dann existiert genau eine (vgl. (13.15) mit $Z = I$) Hochhebung $\widetilde{H} : Z \times I \to Y$ von H mit $\widetilde{H_0} = \widetilde{f}$*

Beweis. Eindeutigkeit: Für jedes $z \in Z$ ist $t \to \widetilde{H}(z,t)$ eine Hochhhebung von $\gamma_z : t \to H(z,t)$ mit $\widetilde{H}(z,0) = \widetilde{f}(z)$ und diese ist nach (13.15) eindeutig.

Existenz: Es ist $\widetilde{f}(z) \in \pi^{-1}(\gamma_z(0))$ also existiert ein (eindeutiger) Weg $\widetilde{\gamma_z} : I \to Y$ mit $\widetilde{\gamma_z}(0) = \widetilde{f}(z)$ und $\pi \circ \widetilde{\gamma_z} = \gamma_z$ (nach (13.12) und (13.15))
Wir definieren $\widetilde{H}(z,t) := \widetilde{\gamma_z}(t)$
Es ist nun noch zu zeigen, dass $\widetilde{H}$ stetig ist.

Sei $\overline{z} \in Z$ und $S_{\overline{z}} := \{t \in I \mid \widetilde{H} \text{ ist in einer Umgebung von } (\overline{z}, t) \in Z \times I \text{ stetig}\}$
Wir zeigen $S_{\overline{z}}$ ist offen und abgeschlossen in I und $0 \in S_{\overline{z}}$ (da I zusammenhängend ist $\Rightarrow\ S_{\overline{z}} = I$)

Zeige: $S_{\overline{z}}$ ist offen.
Sei $t \in S_{\overline{z}} \Rightarrow\ \exists V \subseteq Z,\ W \subseteq I$ offen mit $(\overline{z}, t) \in V \times W$ und $\widetilde{H}_{|V \times W}$ ist stetig
$\Rightarrow \forall t' \in W$ ist $\widetilde{H}$ stetig auf einer Umgebung $V \times W$ von $(\overline{z}, t') \Rightarrow\ t \in W \subseteq S_{\overline{z}}$
Also ist $S_{\overline{z}}$ offen in I

Zeige $S_{\overline{z}}$ ist abgeschlossen.
Sei $\overline{t} \in \overline{S_{\overline{z}}}$, dann ist $\cancel{Z} : \overline{t} \in S_{\overline{z}}$
Wähle $U \subseteq X$ offen mit $H(\overline{z}, \overline{t}) \in U$ wie in der Definition der Überlagerung.
(d.h. $\pi^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in J} U_j$ offen, U_j offen und disjunkt und $\pi_{|U_j} : U_j \to U$ Homöomorphismen $\forall j \in J$)
$\exists\ V \subseteq Z,\ W \subseteq I$ offen und zusammenhängend mit $(\overline{z}, \overline{t}) \in V \times W$ und $H(V \times W) \in U$ wegen der Stetigkeit von H
$\overline{t} \in \overline{S_{\overline{z}}} \Rightarrow\ \exists t \in S_{\overline{z}} \cap W\ \Rightarrow$ o.E. $(\widetilde{H}_t)_{|V}$ ist stetig $\Rightarrow$ o.E. $\exists j \in J :\ \widetilde{H}_t(V) \subseteq U_j$
$\Rightarrow\ \widetilde{H}_{|V \times W} = (\pi_{|U_j})^{-1} \circ (H|V \times W)$ stetig $\Rightarrow\ t \in W \subseteq S_{\overline{z}}\ \Rightarrow\ t \in S_{\overline{z}}$

$0 \in S_{\overline{z}}$ zeigt man genauso, nur spielt $\widetilde{f}$ die Rolle von $\widetilde{H}_t$ □

Folgerung 13.19. *Ist $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung, $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to Y$ ein Weg mit $\widetilde{\gamma}(0) \neq \widetilde{\gamma}(1)$ aber mit $\pi \circ \widetilde{\gamma}(0) = \pi \circ \widetilde{\gamma}(1) =: x_0 \in X$*
Dann gilt für $\gamma := \pi \circ \widetilde{\gamma} \in \Omega(X, x_0) :\ e \neq [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$
(d.h. γ ist nicht zu einem Punkt zusammenziehbar)

Beweis. Angenommen $\gamma \sim_{rel\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$ und $H : [0,1] \times I \to X$ die zugehörige Homotopie mit $\gamma = H_0$ und $\epsilon_{x_0} = H_1$
Es ist $\widetilde{\gamma}$ ein Lift von $\gamma = H_0$
$\overset{(13.18)}{\Rightarrow}\ \exists$ genau eine Hochhebung $\widetilde{H} : [0,1] \times I \to Y$ von H mit $\widetilde{H}_0 = \widetilde{\gamma}$

Es ist $\widetilde{H}(0,\cdot)$ eine Hochhebung von $H(0,\cdot) \equiv x_0$
Definiere $y_0 := \widetilde{H}(0,0)$, dann ist $\pi(y_0) = x_0$ und wegen der Eindeutigkeit (13.15) gilt

$$\widetilde{H}(0,t) = y_0 = \widetilde{H}(0,0)\ \forall t \in I$$

da ϵ_{y_0} auch ein Lift von $H(0,\cdot)$ mit Start in y_0 ist.

$\widetilde{H}_1$ ist ein Lift von $H_1 = \epsilon_{x_0}$ mit $\widetilde{H}_1(0) = \widetilde{H}(0,1) = y_0$. Damit gilt wieder

$$\widetilde{H}(s,1) = y_0 = \widetilde{H}(1,1)\ \forall s \in [0,1]$$

$t \to \widetilde{H}(1,1-t)$ ist eine Hochhebung von $t \to H(1,1-t) \equiv x_0$ mit Start $\widetilde{H}(1,1) = y_0$. Auch hier ist demnach

$$\widetilde{H}(1,1-t) = y_0 = \widetilde{H}(1,0)\ \forall t \in I$$

Also ist $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{H}(0,0) = y_0 = \widetilde{H}(1,0) = \widetilde{\gamma}(1)$
Dies ist ein Widerspruch. □

13.3 Anwendungen der Überlagerungstheorie

13.3.1 Berechnung von Fundamentalgruppen

Folgerung 13.20.

$$(\pi_1(S^1),\cdot) \simeq (\mathbb{Z},+)$$

Beweis. Es ist $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \cong S^1$, wir berechnen daher die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ im Punkt $[0]$
Sei $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ die Projektion.
Zu einem $n \in \mathbb{Z}$ betrachte den Weg $\widetilde{\gamma_n} : [0,1] \to \mathbb{R},\ \widetilde{\gamma_n}(t) = tn$ und $\gamma_n := \pi \circ \widetilde{\gamma_n} : [0,1] \to \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$
Dann ist $\gamma_n \in \Omega(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}},[0])$

Wir zeigen, dass die offensichtlich wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned}\phi :&\mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}})\\ &n \to [\gamma_n]\end{aligned}$$

ein Isomosphismus ist.
(Bemerkung: $[x]$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist die Äquivalenzklasse in $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$, $[\gamma]$ mit $\gamma \in \Omega(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}},[0])$ ist die Äquivalenzklasse in $\pi_1(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}},[0])$)

ϕ ist ein Homomorphimus:
ZZ : $[\gamma_{n+m}] = [\gamma_n * \gamma_m]$ Es ist

$$\gamma_n * \gamma_m = \begin{cases}\gamma_n(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2}\\ \gamma_m(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1\end{cases} = \begin{cases}[2tn] & 0 \le t \le \frac{1}{2}\\ [(2t-1)m] & \frac{1}{2} \le t \le 1\end{cases}$$

Definiere

$$\varphi := \begin{cases}\frac{2tn}{n+m} & 0 \le t \le \frac{1}{2}\\ \frac{(2t-1)m+n}{n+m} & \frac{1}{2} \le t \le 1\end{cases}$$

dann ist φ stetig mit $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1$ und es gilt nach (12.2) $[\gamma_{n+m}] = [\gamma_{n+m} \circ \varphi] = [\gamma_n * \gamma_m]$

ϕ ist injektiv:
Sei $n \neq 0$, dann ist $\widetilde{\gamma_n}$ ein nicht geschlossener Weg, also ist nach (13.19) $[\gamma_n] \neq e$ und damit ist $\ker\phi = \{e\}$, also ϕ injektiv.

ϕ surjektiv:
Sei $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}})$, dann ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ geschlossen und es existiert nach (13.12) ein $\gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\pi \circ \gamma' = \gamma$ und $\gamma'(0) = 0$
Da $\pi \circ \gamma'(1) = [0] \Rightarrow \ \exists n \in \mathbb{Z} : \ \gamma'(1) = n \in \mathbb{Z}$
Definiere die Homotopie $H : [0,1] \times I \to \mathbb{R}$, $H(s,t) = \gamma'(s)t + \widetilde{\gamma_n}(s)(1-t)$ zwischen γ' und $\widetilde{\gamma_n}$ ($\widetilde{\gamma_n}$ definiert wie oben)
Die Abbildung $\widetilde{H} = \pi \circ H$ ist eine $rel\{0,1\}-$Homotopie zwischen $\gamma = \pi \circ \gamma'$ und $\gamma_n = \pi \circ \widetilde{\gamma_n}$, also ist $\phi(n) = [\gamma_n] = [\gamma]$ und damit ist n ein Urbild zu $[\gamma]$ □

Beispiel 13.21. *Ist $n \neq 2$, so sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph.*

Beweis. $n = 1 : \mathbb{R} \setminus \{\text{Punkt}\}$ nicht zusammenhängend, $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Punkt}\}$ ist zusammenhängend
$n > 2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Punkt}\}$ ist homotopieäquivalent zu S^1 also ist $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Punkt}\}) = \mathbb{Z}$
Aber $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}) = \{e\}$, da $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}$ einfach zusammenhängend ist. □

13.3.2 Retraktionen und Fixpunktsatz von Brouwer

Definition 13.22. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Eine stetige Abbildung $r : X \to A$ heißt **Retraktion** von X auf A, falls $r_{|A} = id_A$*

Folgerung 13.23. *Es gibt keine Retraktion r von $\overline{B^2} := \overline{B(0,1)} \subseteq \mathbb{R}^2$ auf $S^1 = \partial\overline{B^2}$*

Beweis. Sei $x_0 \in S^1 \subseteq \overline{B^2}$ und $i : S^1 \to \overline{B^2}$ die Inklusion.
Angenommen es existiert eine Retraktion $r : \overline{B^2} \to S^1$, dann gilt

$$id_{\pi_1(S^1,x_0)} = (id_{S^1})_* = (r \circ i)_* = r_* \circ i_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_0)$$

aber es ist $\pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$ und $\pi_1(\overline{B^2}, x_0) = \{e\}$ also ist der Homomorphismus $i_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(\overline{B^2}, x_0)$ die triviale Abbildung $i_*(\pi_1(S^1, x_0)) = \{e\}$
Dies ist aber ein Widerspruch zu $id_{\pi_1(S^1,x_0)} = r_* \circ i_*$ □

Folgerung 13.24. *(Fixpunktsatz von Brouwer) Sei $F : \overline{B^2} \to \overline{B^2}$ stetig, dann hat F einen Fixpunkt, d.h. $\exists x \in \overline{B^2} : \ F(x) = x$*

Beweis. Angenommen: $\forall x \in \overline{B^2} : \ F(x) \neq x$
Sei $< \cdot, \cdot >$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und $|.|$ die zugehörige Norm. Sei

$$A(x) := |x - F(x)|^2, \ B(x) :=< x - F(x), x >, \ C(x) := |x|^2 - 1$$

Dann ist $A(x) > 0$ und $C(x) \leq 1$ und A, B, C sind als Abbildungen in x stetig.
Sei weiter $t(x) := \frac{1}{A(x)}\left(-B(x) + \sqrt{B^2(x) - A(x)C(x)}\right)$, dann ist t stetig, $t(x) \geq 0$ und $x \in S^1 \Rightarrow t(x) = 0$
Die Abbildung $r : \overline{B^2} \to S^1$ mit $r(x) := x + t(x)(x - F(x))$ ist dann stetig und wohldefiniert (d.h. $|r(x)| = 1$) nach Wahl von $t(x)$ und eine Retraktion von $\overline{B^2}$ auf S^1, dies ist ein Widerspruch zu (13.23) □

Bemerkung: Im Fall $n = 1$ ist der Satz auch richtig, er lautet dann:
Eine stetige Funktion $F : [-1,1] \to [-1,1]$ hat einen Fixpunkt.
Dies ist klar wenn man $G(x) := F(x) - x$ setzt, denn wegen $G(-1) \geq 0$ und $G(1) \leq 0$ folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz!

13.3.3 Die Umlaufzahl

Eine der wichtigsten Anwendungen der Überlagerungstheorie ist die Möglichkeit eine Umlaufzahl für Wege zu definieren.

Lemma 13.25. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ein geschlossener Weg. Dann existiert eine stetige Funktion $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit*

$$\frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|} = e^{i\varphi(t)}$$

Es ist dann die Differenz

$$\frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)) \in \mathbb{Z}$$

und von φ unabhängig.

Beweis. (13.13) und (13.16) da $\frac{\gamma(t)-z_0}{|\gamma(t)-z_0|} \in S^1$ □

Definition 13.26. *In obiger Situation heißt*

$$n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)) \in \mathbb{Z}$$

die Umlaufzahl von γ um z_0

Bemerkung:

(i.) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$, $|.|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ und $\pi : \mathbb{R} \to S^1$, $\pi(x) = (\cos(x), \sin(x))$
Dann ist π offensichtlich eine Überlagerung (analog wie in (13.9) (ii.)) und es existiert eine stetige Funktion $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\gamma(t) - (x_0, y_0)}{|\gamma(t) - (x_0, y_0)|} = \pi \circ \varphi(t) = (\cos \circ \varphi(t), \sin \circ \varphi(t))$$

Auch hier ist dann $n(\gamma, (x_0, y_0)) := \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)) \in \mathbb{Z}$ und von φ unabhängig und heißt Umlaufzahl um (x_0, y_0)

Dies ist offensichtlich, da man zu einem in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ geschlossenen Weg $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ den zugehörigen Weg $\gamma'(t) := \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ in $\mathbb{C} \setminus \{x_0 + iy_0\}$ definieren kann.
Wählt man dann φ aus (13.25) zu γ', zeigt sich, dass genau das gleiche φ auch $\frac{\gamma(t)-(x_0,y_0)}{|\gamma(t)-(x_0,y_0)|} = \pi \circ \varphi(t)$ erfüllt (Wegen Eulerformel)

Es gilt dann insbesondere:

$$n(\gamma, (x_0, y_0)) = n(\gamma', x_0 + iy_0)$$

Im folgenden werden wir hauptsächlich mit $\mathbb{C}$ arbeiten, es sei aber bemerkt, dass Lemma 13.28, 13.30 und (13.31) natürlich auch für Wege in $\mathbb{R}^2$ gelten (es muss nur obige Identifizierung durchgeführt werden)

(ii.) Es ist möglich die Funktion φ konkret (ohne Überlagerungstheorie) zu konstruieren, dabei wird φ als der Winkel zwischen den komplexen Zahlen 1 und $\frac{\gamma(t)-z_0}{|\gamma(t)-z_0|}$ definiert und dies stetig aneinandergesetzt.

(iii.) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ geschlossener Weg und λ ein Logarithmus von $\gamma - z_0$ nach (13.14) Dann ist $e^{\lambda(t)} = \gamma(t) - z_0$ und es gilt $n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}(\lambda(1) - \lambda(0))$

denn: Es ist $|\gamma(t) - z_0| = |e^{\lambda(t)}| = e^{\operatorname{Re}\lambda(t)}$ und damit $\frac{\gamma(t)-z_0}{|\gamma(t)-z_0|} = e^{\operatorname{Im}\lambda(t)}$ sowie $\operatorname{Re}\lambda(1) = \operatorname{Re}\lambda(0)$ und es gilt (da $\operatorname{Im}\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig ist)

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi}(\operatorname{Im}\lambda(1) - \operatorname{Im}\lambda(0)) = \frac{1}{2\pi i}(\lambda(1) - \lambda(0))$$

Beispiel 13.27. *Sei $\gamma(t) = \exp(8\pi i t)$ dann ist $n(\gamma, 0) = 4$, was der Anschauung entspricht.*

Lemma 13.28. *Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ zwei Schleifen die in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ geschlossen homotop sind.*
d.h. $h_0 = \gamma_0,\ h_1 = \gamma_1$ und $h(0,t) = h(1,t),\ \forall t \in I$
Dann gilt

$$n(\gamma_0, z_0) = n(\gamma_1, z_0)$$

Beweis. Seien $\widetilde{\gamma}_j(t) := \frac{\gamma_j(t)-z_0}{|\gamma_j(t)-z_0|}$ $j = 0,1$ und φ_j $j = 0,1$ die zur Umlaufzahl gehörenden Hochhebungen, d.h.
$\widetilde{\gamma}_i(t) = e^{i\varphi_j(t)}$ $j = 0,1$
Dann ist $\widetilde{h}(s,t) := \frac{h(s,t)-z_0}{|h(s,t)-z_0|}$ eine geschlossene Homotopie von $\widetilde{\gamma}_0$ nach $\widetilde{\gamma}_1$.
Sei $H : [0,1] \times I \to \mathbb{R}$ eine Hochhebung der Homotpie $\widetilde{h}$ wie in (13.18), dann gilt $n(h_t, z_0) = \frac{1}{2\pi}(H_t(1) - H_t(0))$ nach Definition der Umlaufzahl (bemerke, dass die h_t geschlossen sind)
Die Funktion $t \to \frac{1}{2\pi}(H_t(1) - H_t(0))$ ist eine stetige Funktion von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{Z}$. Dann muss sie aber schon konstant sein, insbesondere also
$n(\gamma_0, z_0) = n(h_0, z_0) = n(h_1, z_0) = n(\gamma_1, z_0)$ □

Bemerkung: Insbesondere gilt, dass $n([\gamma], z_0) := n(\gamma, z_0)$ für $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, z_1)$ wohldefiniert ist. Das folgende Lemma ist für Anwendungen äußerst wichtig, da meist γ zumindest stückweise stetig differenzierbar ist.

Lemma 13.29. *Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt*

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, dt$$

Beweis. Betrachte den Weg $h : [0,1] \to S^1,\ h(t) := \frac{\gamma(t)-z_0}{|\gamma(t)-z_0|}$ und sei $r : [0,1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\ r(t) := |\gamma(t) - z_0|$
Außerdem sei φ der Lift mit $\frac{\gamma(t)-z_0}{|\gamma(t)-z_0|} = \exp(i\varphi(t))$
Dann gilt nach (13.17):

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{h'(t)}{h(t)}\, dt$$

Es ist

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma(t) - z_0|} + (\gamma(t) - z_0) \cdot \frac{r'(t)}{r(t)^{\frac{3}{2}}}$$

Also

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} + \frac{r'(t)}{r(t)}$$

und da γ und damit r geschlossen ist, folgt

$$\int_0^1 \frac{r'(t)}{r(t)}\,dt = \ln(r(1)) - \ln(r(0)) = 0$$

und damit die Behauptung. $\square$

Folgende Eigenschaft der Umlaufzahl unterstützt auch ihre anschauliche Interpretation

Lemma 13.30. *Sei $z_1 \neq z_0$ beliebig, dann ist die Abbildung*

$$n(\cdot, z_0) : (\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, z_1), \cdot) \to (\mathbb{Z}, +)$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Es ist zu zeigen: $n(\gamma_0 * \gamma_1, z_0) = n(\gamma_0, z_0) + n(\gamma_1, z_0)$
Sei $n(\gamma_j, z_0) = \frac{1}{2\pi}(\varphi_j(1) - \varphi_j(0))$ $j = 0, 1$
Es gilt wegen $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$, dass $e^{i\varphi_0(1)} = e^{i\varphi_1(0)}$ also existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi_0(1) + k2\pi = \varphi_1(0)$
D.h. $k2\pi = \varphi_1(0) - \varphi_0(1)$
Definiere

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_0(2t) + k2\pi & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi_1(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist φ stetig und es gilt

$$\frac{\gamma_0 * \gamma_1(t) - z_0}{|\gamma_0 * \gamma_1(t) - z_0|} = e^{i\varphi(t)}$$

und nach Definition

$$\begin{aligned} n(\gamma_0 * \gamma_1, z_0) &= \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)) = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1(1) - \varphi_1(0) + \varphi_0(1) - \varphi_0(0)) \\ &= n(\gamma_0, z_0) + n(\gamma_1, z_0) \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung: Insbesondere ist $n(\overline{\gamma}, z_0) = -n(\gamma, z_0)$.
Weitere Eigenschaften der Umlaufzahl:

Lemma 13.31. *(i.) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ein geschlossener Weg. Dann gilt:*

$$\gamma \text{ ist in } \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \text{ zusammenziehbar} \Leftrightarrow n(\gamma, z_0) = 0$$

(ii.) Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ Kurven mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, sowie $\gamma_0(0) = \gamma_1(1)$. Dann sind diese $\sim_{rel\{0,1\}}$ homotop in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\} \Leftrightarrow n(\gamma_0 * \overline{\gamma_1}, z_0) = 0$

(iii.) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1\}$ ein geschlossener Weg und $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ stetig mit $\varphi(0) = z_0$, $\varphi(1) = z_1$
$\Rightarrow$ $n(\gamma, z_0) = n(\gamma, z_1)$

Beweis. zu (i.): Es ist natürlich nur " $\Leftarrow$ " zu zeigen.
Sei also $n(\gamma, z_0) = 0$ und λ ein Logarithmus von $\gamma - z_0$
Definiere $H : [0,1] \times I \to \mathbb{C}$ durch $H(s,t) := t\lambda(0) + (1-t)\lambda(s)$
und $\widetilde{H} : [0,1] \times I \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ durch $\widetilde{H}(s,t) := \exp(H(s,t)) + z_0$

Dann ist $\widetilde{H}$ eine Homotopie mit $\widetilde{H}_0 = \exp\circ\lambda + z_0 = \gamma$ und $\widetilde{H}_1 \equiv \exp(\lambda(0)) + z_0 = \gamma(0)$, sowie

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(0,t) &= e^{\lambda(0)} + z_0 = \gamma(0)\\ \widetilde{H}(1,t) &= e^{\lambda(1)+t(\lambda(1)-\lambda(0))} + z_0 = e^{\lambda(1)}\underbrace{e^{2\pi i\cdot n(\gamma,z_0)t}}_{=1} + z_0 = \gamma(1) = \gamma(0)\end{aligned}$$

Damit ist $\widetilde{H}$ eine $rel\{0,1\}-$Homotopie von γ zu $\epsilon_{\gamma(0)}$ und es folgt die Behauptung.

zu (ii.): Dies folgt sofort mit 12.5 und (i.).

zu (iii.): Betrachte $H : [0,1] \times I \to S^1$ mit $H(s,t) := \frac{\gamma(s)-\varphi(t)}{|\gamma(s)-\varphi(t)|}$ geschlossene Homotopie von $\frac{\gamma(s)-z_0}{|\gamma(s)-z_0|}$ nach $\frac{\gamma(s)-z_1}{|\gamma(s)-z_1|}$
und $\widetilde{H} : [0,1] \times I \to \mathbb{R}$ die Hochhebung dieser Homotopie mit $e^{i\widetilde{H}(s,t)} = H(s,t)$ und $\widetilde{H}_0 = \varphi_0$, wobei φ_0 die zur Umlaufzahl von γ um z_0 gehörende Hochhebung ist.
$n : [0,1] \to \mathbb{R},\ n(t) := \frac{1}{2\pi}(\widetilde{H}(1,t) - \widetilde{H}(0,t))$ ist die Umlaufzahl von γ um $\varphi(t)$, also ist n stetig und in $\mathbb{Z}$
Dann ist n aber konstant und mit $n(\gamma, z_0) = n(0) = n(1) = n(\gamma, z_1)$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung: Sind γ_0, γ_1 in (ii.) sogar geschlossene Kurven in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$, so gilt wegen $n(\gamma_0 * \overline{\gamma_1}, z_0) = n(\gamma_0, z_0) - n(\gamma_1, z_0)$ (13.30), dass sie genau dann $\sim_{rel\{0,1\}}$ homotop in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ sind, wenn $n(\gamma_0, z_0) = n(\gamma_1, z_0)$ gilt.

Es sollen nun einige wichtige Sätze mit Hilfe der Umlaufzahl bewiesen werden:

Als erstes beweisen wir die folgende anschauliche Tatsache über stetige Funktionen auf einer Kreisscheibe.

Folgerung 13.32. *Sei $f : \overline{B^2} \to \mathbb{R}^2$ stetig mit $B^2 = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$*
Sei weiter $\gamma : [0,1] \to \partial B^2$ ein geschlossener Weg und es sei $p \in \mathbb{R}^2$ mit $n(f\circ\gamma, p) \neq 0$, dann existiert ein $q \in \overline{B^2}$ mit $f(q) = p$

Beweis. Angenommen $f(q) \neq p\ \forall q \in \overline{B^2}$
Definiere $h : [0,1]\times I \to \mathbb{R}^2\setminus\{p\}$ durch $h(s,t) = f(t\gamma(s))$, dann ist h stetig, alle h_t sind geschlossen und $h_0 \equiv f(0),\ h_1 = f\circ\gamma$
Also ist nach (13.28) $n(f\circ\gamma, p) = n(\epsilon_{f(0)}, p) = 0$, ein Widerspruch. □

Man kann nun auch den folgenden Satz beweisen

Folgerung 13.33. *Es seien $f, g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ stetig und für alle $x, y \in [-1,1]$ gelte:*

$$f(1,y) > 0,\ \ f(-1,y) < 0,\ \ g(x,1) > 0,\ \ g(x,-1) < 0$$

Dann besitzt das Gleichungssystem

$$f(x,y) = 0 \quad g(x,y) = 0$$

eine Lösung $(x_0, y_0) \in [-1,1]^2$
(diese ist i.a. nicht eindeutig)

Beweis. Sei $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \partial([-1,1]^2)$ ein geschlossener Weg der den Rand des Rechtecks genau einmal umläuft und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ definiert als $\gamma(t) := (f\circ\widetilde{\gamma}(t), g\circ\widetilde{\gamma}(t))$
Dann ist $H : [0,1]\times I \to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mit $H(s,t) := (1-t)\gamma(s) + t\widetilde{\gamma}(s)$ eine Homotopie von γ nach $\widetilde{\gamma}$ mit geschlossenen H_t
Entscheidend ist, dass das Bild von H in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ liegt.

Dies folgt aber aus den Voraussetzungen, denn sei beispielsweise die zweite Koordinate von $\widetilde{\gamma}$ auf dem Intervall J gerade gleich 1, dann ist $H(J,t) = (1-t)\gamma(J) + t\widetilde{\gamma}(J)$ dies ergibt in der zweiten Koordinaten:
$(1-t)g(\widetilde{\gamma}(J)) + t \cdot 1$ und da $\widetilde{\gamma}$ in der zweiten koordinaten 1 ist, gilt nach Voraussetzung $g(\widetilde{\gamma}(J)) > 0$ also ist die zweite Koordinate von $H(J,t)$ echt größer 0.
Analog auf den anderen Teilen der Parametrisierung.

Also ist $n(\gamma,(0,0)) = n(\widetilde{\gamma},(0,0))$ nach (13.28) und $n(\widetilde{\gamma},(0,0)) = 1$ (klar, $\widetilde{\gamma}$ ist z.B. homotop zu einem einmal durchlaufenen Kreis)

Man kann nun Folgerung 13.32 anwenden (der Beweis geht analog mit $[-1,1]^2$ statt $\overline{B^2}$) und erhält:
$\exists (x_0,y_0) \in [-1,1]^2 : \ (f,g)(x_0,y_0) = (0,0)$ □

Man kann auch den Fundamentalsatz der Algebra auf elegante Art und Weise mit Hilfe von Umlaufzahlen beweisen.

Folgerung 13.34. *Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $n \geq 1$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. o.E. sei $p(z) = z^n + q(z)$, $deg(q) \leq n-1$
Sei $R > 0$ und $p_R : \overline{B^2} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p_R(z) := \frac{1}{R^n} p(Rz) = z^n + \frac{1}{R^n} q(Rz)$
Wähle R nun so groß, dass $\forall z \in \mathbb{C} : \ |z| = R \Rightarrow \frac{|q(z)|}{R^n} < 1$ gilt (dies geht da $deg(q) \leq n-1$)
Dann gilt für $|z| = 1 : \ \left|\frac{1}{R^n} q(Rz)\right| < 1$
Sei $\gamma : [0,1] \to S^1, \ \gamma(t) = e^{2\pi i t}$ und $H : [0,1] \times I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ H(s,t) := t\gamma^n(s) + (1-t)p_R(\gamma(s))$
H ist wohldefiniert, denn angenommen es gilt $H(s,t) = 0$ so gilt mit $\gamma(s) =: z$

$$tz^n + (1-t)(z^n + \frac{1}{R^n} q(Rz)) = 0 \ \Rightarrow \ z^n = (t-1)\frac{1}{R^n} q(Rz)$$

Aber der Betrag der linken Seite ist 1 und der der Rechten ist echt kleiner 1, was ein Widerspruch ist.

Also liegt das Bild von H wirklich in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und es ist $H_0 = p_R \circ \gamma, \ H_1 = \gamma^n$ und die H_t sind geschlossen.
Also ist $n(\gamma^n, 0) = n(p_R \circ \gamma, 0)$ und es ist offensichtlich $n(\gamma^n, 0) = n$, also existiert nach (13.32) ein $w_0 \in \overline{B^2}$ mit $p_R(w_0) = 0$ und damit $p(Rw_0) = 0$ □

13.4 Hochhebbarkeitskriterium und Decktransformationen

Satz 13.35. *(Hochhebbarkeitskriterium)*
Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung, Z zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.
Sei $f : Z \to X$ stetig und $z_0 \in Z$, mit $x_0 := f(z_0), \ y_0 \in \pi^{-1}(x_0)$.
Dann existiert genau dann eine Hochhebung $\widetilde{f} : Z \to Y$ von f mit $\widetilde{f}(z_0) = y_0$, wenn

$$f_*(\pi_1(Z,z_0)) \subseteq \pi_*(\pi_1(Y,y_0))$$

gilt.

$$\begin{tikzcd}
(Z,z_0) \arrow[rr, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & (Y,y_0) \arrow[dl, "\pi"] \\
& (X,x_0) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1(Z,z_0) \arrow[rr, "\widetilde{f}_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & \pi_1(Y,y_0) \arrow[dl, "\pi_*"] \\
& \pi_1(X,x_0) &
\end{tikzcd}$$

(Nach (13.15) gibt es höchstens ein solches $\widetilde{f}$)

Beweis. Wir konstruieren einen Lift $\widetilde{f}$

Sei $z \in Z$. Da Z wegzusammenhängend ist (4.22) können wir einen Weg $\gamma : [0,1] \to Z$ wählen, mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$

Zu $f \circ \gamma : [0,1] \to X$ existiert nach (13.12) und (13.15) ein eindeutiger Lift $\alpha : [0,1] \to Y$ mit $\alpha(0) = y_0$

Wir definieren $\widetilde{f}(z) := \alpha(1)$

Es ist zu zeigen, dass $\widetilde{f}$ wohldefiniert ist, d.h. dass der Wert $\alpha(1)$ von der Wahl von γ unabhängig ist.

Seien also $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to Z$ zwei Wege mit Start in z_0 und Endpunkt z

$\Rightarrow$ $[f \circ (\gamma_1 * \overline{\gamma_2})] \in f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_*(\pi_1(Y, y_0))$

$\Rightarrow$ $\exists H : [0,1] \times I \to X$ stetig und einen Weg $\beta : [0,1] \to Y$ mit $\beta(0) = \beta(1) = y_0$ und $H_0 = f \circ (\gamma_1 * \overline{\gamma_2})$, $H_1 = \pi \circ \beta$ und $H(0,t) = H(1,t) = x_0 \; \forall t \in I$

$\overset{(13.18)}{\Rightarrow}$ $\exists$ Hochhebung $\widetilde{H} : [0,1] \times I \to Y$ von H mit $\widetilde{H}_1 = \beta$

Es gilt $\widetilde{H}(0,t) = \widetilde{H}(1,t) = y_0 \; \forall t \in I$, denn $t \to \widetilde{H}(0,t)$ und ϵ_{y_0} sind Hochhebungen von ϵ_{x_0}. Wegen der Eindeutigkeit in (13.15) folgt dann $\widetilde{H}(0,t) \equiv y_0$ (genauso für $\widetilde{H}(1,t)$)

Also ist $\widetilde{H}_0$ ein Lift von $H_0 = f \circ (\gamma_1 * \overline{\gamma_2}) = (f \circ \gamma_1) * \overline{(f \circ \gamma_2)}$ mit Anfangs- und Endpunkt y_0

Definiere nun $\sigma_1, \sigma_2 : [0,1] \to Y$ durch $\sigma_1(s) = \widetilde{H}_0(\frac{1}{2}s)$ und $\sigma_2(s) := \widetilde{H}_0(1 - \frac{1}{2}s)$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\pi \circ \sigma_1(s) &= \pi \circ \widetilde{H}_0(\frac{1}{2}s) = H_0(\frac{1}{2}s) = (f \circ \gamma_1) * \overline{(f \circ \gamma_2)}(\frac{1}{2}s) \\
&= f \circ \gamma_1(2 \cdot \frac{1}{2}s) = f \circ \gamma_1(s) \\
\pi \circ \sigma_2(s) &= \pi \circ \widetilde{H}_0(1 - \frac{1}{2}s) = H_0(1 - \frac{1}{2}s) = (f \circ \gamma_1) * \overline{(f \circ \gamma_2)}(1 - \frac{1}{2}s) \\
&= \overline{f \circ \gamma_2}(2 \cdot (1 - \frac{1}{2}s) - 1) = \overline{f \circ \gamma_2}(1 - s) = f \circ \gamma_2(s)
\end{aligned}$$

Also sind σ_1, σ_2 (die eindeutigen) Lifts von $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2$ mit $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = y_0$

Nach Definition von $\widetilde{f}$ ist also $\widetilde{f}(z) = \sigma_1(1)$ und $\widetilde{f}(z) = \sigma_2(1)$

Es ist $\sigma_1(1) = \widetilde{H}_0(\frac{1}{2}) = \sigma_2(1)$ und damit ist $\widetilde{f}$ wohldefiniert.

Außerdem gilt für $z \in Z : \pi \circ \widetilde{f}(z) = \pi(\alpha(1)) = f(\gamma(1)) = f(z)$

Es ist noch zu zeigen, dass $\widetilde{f}$ stetig ist.

Sei $z \in Z$ und U eine offene Umgebung von $f(z) \in X$ wie in der Definition der Überlagerung und $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$

Sei $V \subseteq f^{-1}(U)$ eine offene wegzusammenhängende Umgebung von z

Für $w \in V$ wähle $\widetilde{\gamma}_w : [0,1] \to V$ mit $\widetilde{\gamma}_w(0) = z$, $\widetilde{\gamma}_w(1) = w$ und setze $\gamma_w = \gamma * \widetilde{\gamma}_w$ wobei γ wie vorher ein Weg von z_0 nach z ist.

$\exists j \in J : \; \widetilde{f}(z) \in U_j$, da $\widetilde{f}(z) \in \pi^{-1}(f(z)) \subseteq \pi^{-1}(U)$

Es gilt $\widetilde{f}_{|V} = (\pi^{-1}_{|U_j}) \circ (f_{|V})$, denn:

Sei $w \in V$ und α ein Lift von $f \circ \gamma_w$ mit $\alpha(0) = y_0$, dann ist $\alpha(1) = \widetilde{f}(w)$ und $\alpha(\frac{1}{2}) = \widetilde{f}(z)$ nach Definition.

Sei nun $\alpha_1 : [0,1] \to Y$ definiert durch $\alpha_1(t) := \alpha(\frac{1}{2}(1+t))$, dann ist α_1 ein Lift von $f \circ \widetilde{\gamma}_w$ mit $\alpha_1(0) = \widetilde{f}(z)$

Es ist aber auch $\pi^{-1}_{|U_j} \circ (f \circ \widetilde{\gamma}_w) : [0,1] \to Y$ (es ist $f \circ \widetilde{\gamma}_w$ ein Weg in U, da $V \subseteq f^{-1}(U)$) ein Lift von $\widetilde{\gamma}_w$ mit $\pi^{-1}_{|U_j} \circ (f \circ \widetilde{\gamma}_w)(0) = \pi^{-1}_{|U_j}(f(z)) = \pi^{-1}_{|U_j}(\pi(\widetilde{f}(z))) = \widetilde{f}(z)$

Damit ist $\alpha_1 \equiv \pi^{-1}_{|U_j} \circ (f \circ \widetilde{\gamma}_w)$ und damit $\widetilde{f}(w) = \alpha(1) = \alpha_1(1) = \pi^{-1}_{|U_j} \circ (f \circ \widetilde{\gamma}_w)(1) = \pi^{-1}_{|U_j}(f(w))$

$(\pi^{-1}_{|U_j}) \circ (f_{|V})$ ist stetig $\Rightarrow \widetilde{f}_{|V}$ stetig.

Also ist $\widetilde{f}$ insbesondere stetig auf V, also stetig in z. Da z beliebig war folgt die Behauptung. $\square$

Definition 13.36. *Eine **Decktransformation** einer Überlagerung $\pi : Y \to X$ ist ein Homöomorphismus $h : Y \to Y$ mit $\pi \circ h = \pi$*
*Die Decktransformationen von π bilden mit der Hintereinanderausführung "$\circ$" eine Gruppe, die **Decktransformationsgruppe** $\mathscr{D}(\pi)$*

Bemerkung: $\pi \circ h = \pi \;\Leftrightarrow\; h : Y \to Y$ ist eine Hochhebung von $\pi : Y \to X$

Beispiel 13.37. *(i.)* $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ *die Projektion* $\Rightarrow\; \mathscr{D}(\pi) = \{x \in \mathbb{R} \to x + n \in \mathbb{R} \bigm| n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$

(ii.) $\pi : S^n \to S^n/_{\{\pm id_{S^n}\}} \cong \mathbb{R}P^n \;\Rightarrow\; \mathscr{D}(\pi) = \{\pm id_{S^n}\} \simeq \mathbb{Z}_2$

(iii.) $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n} = T^n \;\Rightarrow\; \mathscr{D}(\pi) = \{x \in \mathbb{R}^n \to x + n \in \mathbb{R}^n \bigm| n \in \mathbb{Z}^n\} \simeq \mathbb{Z}^n$

Satz 13.38. *Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung und Y einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann ist die Decktransformationsgruppe $\mathscr{D}(\pi)$ isomorph zur Fundamentalgruppe von X (da π nach Definition surjektiv ist, ist $X = \pi(Y)$ auch wegzusammenhänged und daher spielt der Basispunkt keine Rolle.)*

Genauer:
Sei $y_0 \in Y$ und $x_0 := \pi(y_0)$
Zu jedem $h \in \mathscr{D}(\pi)$ wähle einen Weg $\gamma_h : [0,1] \to Y$ mit $\gamma_h(0) = y_0$ und $\gamma_h(1) = h(y_0)$.
Dann ist $[\pi \circ \gamma_h] \in \pi_1(X, x_0)$ unabhängig von der Wahl von γ_h und $I_{y_0} : \mathscr{D}(\pi) \to \pi_1(X, x_0)$ mit $I_{y_0}(h) := [\pi \circ \gamma_h]$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. (1.) Wohldefiniertheit von I_{y_0}: Wir müssen zeigen, dass I_{y_0} von der Wahl des Weges γ_h unabhängig ist. Seien also γ_h und $\widetilde{\gamma}_h$ zwei Wege von y_0 nach $h(y_0)$, dann ist $\gamma_h * \overline{\widetilde{\gamma}_h}$ zusammenziehbar, da Y einfach zusammenhängend ist. Nach (12.5) ist dann aber $\gamma_h \sim_{rel\{0,1\}} \widetilde{\gamma}_h$ mittels der Homotopie H.
Es ist dann $\pi \circ H$ eine $rel\{0,1\}-$Homotopie von $\pi \circ \gamma_h$ und $\pi \circ \widetilde{\gamma}_h$ also ist $[\pi \circ \gamma_h] = [\pi \circ \widetilde{\gamma}_h] \in \pi_1(X, x_0)$ und damit ist I_{y_0} wohldefiniert.

(2.) I_{y_0} ist ein Homomorphismus: Seien $h_1, h_2 \in \mathscr{D}(\pi)$
Wähle $\gamma_{h_i},\ i = 1,2$ Wege von y_0 nach $h_i(y_0),\ i = 1,2$ und setze $\gamma_{h_1 \circ h_2} := \gamma_{h_2} * (h_2 \circ \gamma_{h_1})$.
Dann ist dies ein Weg von y_0 nach $h_1 \circ h_2(y_0)$ und es gilt nach (1.), dass

$$\begin{aligned} I_{y_0}(h_2 \circ h_1) &= [\pi \circ (\gamma_{h_2} * (h_2 \circ \gamma_{h_1}))] = [(\pi \circ \gamma_{h_2}) * (\underbrace{\pi \circ h_2}_{=\pi} \circ \gamma_{h_1})] \\ &= [(\pi \circ \gamma_{h_2}) * (\pi \circ \gamma_{h_1})] = [\pi \circ \gamma_{h_2}][\pi \circ \gamma_{h_1}] = I_{y_0}(h_2) \cdot I_{y_0}(h_1) \end{aligned}$$

(3.) I_{y_0} ist injektiv: Sei $h \neq id_Y$
h ist Hochhebung von $\pi \Rightarrow h(y_0) \neq y_0$, denn sonst wären h und id_Y Hochhebungen von π die y_0 auf y_0 abbilden und nach (13.15) wäre dann schon $h = id_Y$
Damit gilt aber nach (13.19) $e \neq [\pi \circ \gamma_h] \in \pi_1(X, x_0) \Rightarrow \ker(I_{y_0}) = \{id_Y\} \;\Rightarrow\; I_{y_0}$ injektiv.

(4.) I_{y_0} ist surjektiv: Sei $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ und $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to Y$ eine Hochhebung von γ mit $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$
Gesucht ist nun ein $h \in \mathscr{D}(\pi)$ mit $h(y_0) = \widetilde{\gamma}(1)$, denn dann gilt $I_{y_0}(h) = [\pi \circ \widetilde{\gamma}] = [\gamma]$ und I_{y_0} ist surjektiv.
$Z := Y$ ist lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend (da einfach zusammenhängend)
$\pi : Z \to X$ und es ist $\pi_1(Z, y_0) = \{e\}$ da Z einf. zusammenhängend, also folgt mit (13.35), dass ein $h : Z \to Y$ stetig mit $h(y_0) = \widetilde{\gamma}(1)$ und $\pi \circ h = \pi$ existiert, d.h.

$$\begin{tikzcd} (Z, y_0) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (Y, \widetilde{\gamma}(1)) \arrow[dl, "\pi"] \\ & (X, x_0) & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Ebenso existiert eine Hochhebung $\widetilde{h} : Y \to Y$ von π mit $\widetilde{h}(\widetilde{\gamma}(1)) = y_0$

$$\begin{tikzcd}
(Y, \widetilde{\gamma}(1)) \arrow[rr, "\widetilde{h}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (Z, y_0) \arrow[dl, "\pi"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

indem man die Rollen von y_0 und $\widetilde{\gamma}(1)$ vertauscht.
Dann sind aber $\widetilde{h} \circ h$ und $h \circ \widetilde{h}$ Lifts von π mit $\widetilde{h} \circ h(y_0) = y_0$ und $h \circ \widetilde{h}(\widetilde{\gamma}(1)) = \widetilde{\gamma}(1)$
Da id_Y ein Lift von π ist und $id_Y(y_0) = y_0$, sowie $id_Y(\widetilde{\gamma}(1)) = \widetilde{\gamma}(1)$ folgt mit (13.15):
$\widetilde{h} \circ h = id_Y$ und $h \circ \widetilde{h} = id_Y$
$\Rightarrow$ h ist ein Homöomorphismus $\Rightarrow$ $h \in \mathscr{D}(\pi)$ □

Beispiel 13.39. *Es gilt nach Beispiel 13.37*

(i.) $\pi_1(S^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}$

(ii.) $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}_2$

(iii.) $\pi_1(T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$

Allgemeiner als der obige Satz, ist folgendes Lemma:

Lemma 13.40. *Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung und Y zusammenhängend, sowie lokal wegzusammenhängend, $y_0 \in Y$, $x_0 := \pi(y_0)$.*
Ist $\pi_*(\pi_1(Y, y_0))$ normale Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$, so gilt:

(i.) $[I_{y_0}] : \mathscr{D}(\pi) \to \pi_1(X, x_0)/_{\pi_*(\pi_1(Y, y_0))}$ *ist ein Isomorphismus.*
($[I_{y_0}] = p \circ I_{y_0}$, wobei p die Projektion $p : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)/_{\pi_*(\pi_1(Y, y_0))}$ ist.)

(ii.) *$\forall x \in X$ operiert $\mathscr{D}(\pi)$ transitiv auf $\pi^{-1}(x)$, d.h. $\forall y, y' \in \pi^{-1}(x) \; \exists \; h \in \mathscr{D}(\pi) : h(y) = y'$*

(iii.) *$\pi : Y \to X$ induziert einen Homöomorphismus $H : Y/_{\mathscr{D}(\pi)} \to X$ durch $H([y]) := \pi(y)$*

Es sei angemerkt, dass aus (i.)-(iii.) folgt, dass $\pi_*(\pi_1(Y, y_0))$ normal ist, also ist dies eine notwendige Voraussetzung.

Beweis. Der Beweis von (i.) soll hier lediglich skizziert werden.
$[I_{y_0}]$ ist wohldefiniert, denn:
Seien $\gamma_h, \widetilde{\gamma_h}$ Wege von y_0 nach $h(y_0) \Rightarrow [\gamma_h * \overline{\widetilde{\gamma_h}}] \in \pi_1(Y, y_0) \Rightarrow [\pi \circ \gamma_h] \cdot [\pi \circ \widetilde{\gamma_h}]^{-1} \in \pi_*(\pi(Y, y_0)) \Rightarrow$ $[\pi \circ \gamma_h] \sim [\pi \circ \widetilde{\gamma_h}]$ bezüglich der Äquivalenzrelation in $\pi_1(X, x_0)/_{\pi_*(\pi_1(Y, y_0))}$
Die Injektivität von $[I_{y_0}]$ folgt mit Hochheben von Homotopien ähnlich wie in (13.38)
Die Homomorphismuseigenschaft zeigt man wie in (13.38)
Zur Surjektivität:
Zz $\forall y_1 \in \pi^{-1}(x_0) \; \exists \; h \in \mathscr{D}(\pi) : \; h(y_0) = y_1$
Solch ein h existiert nach (13.35) $\Leftrightarrow \pi_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_*(\pi_1(Y, y_1))$
Ist nun $\gamma : [0, 1] \to Y$ Weg mit $\gamma(0) = y_0$ und $\gamma(1) = y_1$, so gilt $\pi_1(Y, y_1) = J_\gamma(\pi(Y, y_0)) = \left\{ [(\overline{\gamma} * \alpha) * \gamma] \;\middle|\; \alpha \in \Omega(Y, y_0) \right\}$
$\Rightarrow \pi_*(\pi_1(Y, y_1)) = [\pi \circ \gamma]^{-1} \cdot \pi_*(\pi_1(Y, y_0)) \cdot [\pi \circ \gamma] = \pi_*(\pi_1(Y, y_0))$ □

14 Die universelle Überlagerung und die Klassifikation der Überlagerungen

Bemerkung: Ist $\pi : Y \to X$ Überlagerung und $h : Y \to Y'$ ein Homöomorphismus, so ist $\pi' := \pi \circ h^{-1} : Y' \to X$ auch eine Überlagerung.

Definition 14.1. *Zwei Überlagerungen $\pi : Y \to X$, $\pi' : Y \to X$ von X heißen isomorph, falls ein Homöomorphismus $h : Y \to Y'$ existiert mit $\pi' \circ h = \pi$*

Satz 14.2. *Sei $Y \neq \emptyset$, $\pi : Y \to X$ und $\pi' : Y \to X$ Überlagerungen, Y, Y' zusammenhängend, sowie lokal wegzusammenhängend. Dann gilt:*
π und π' sind genau dann isomorph, wenn es Punkte $y_0 \in Y$ und $y_0' \in Y'$ gibt mit $\pi(y_0) = \pi'(y_0')$ und $\pi_*(\pi_1(Y, y_0)) = \pi'_*(\pi_1(Y', y_0'))$

Beweis. „$\Rightarrow$„: Sei $h : Y \to Y'$ Homöomorphismus mit $\pi' \circ h = \pi$.
Wähle $y_0 \in X$ und $y_0' := h(y_0) \Rightarrow \pi(y_0) = \pi'(y_0')$ und es gilt, da h_* ein Isomorphismus ist:
$\pi_*(\pi_1(Y, y_0)) = \pi'_* \circ h_*(\pi_1(Y, y_0)) = \pi'_*(\pi_1(Y', y_0'))$

„$\Leftarrow$„: Nach (13.35) existieren Hochhebungen $h : (Y, y_0) \to (Y', y_0')$ von $\pi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ und $h' : (Y', y_0') \to (Y, y_0)$ von $\pi' : (Y', y_0') \to (X, x_0)$
Es gilt $h' \circ h(y_0) = y_0$ sowie $h \circ h'(y_0') = y_0'$ und $h' \circ h : Y \to Y'$ ist Hochhebung von π, da $\pi \circ (h' \circ h) = \pi' \circ h = \pi$.
Da id_Y aber auch eine Hochhebung von π mit $id_Y(y_0) = y_0$ ist folgt wegen der Eindeutigkeit in (13.15), dass $h' \circ h = id_Y$ ist.
Analog folgt $h \circ h' = id_{Y'}$ und damit sind h, h' Homöomorphismen und π, π' sind isomorph. □

Definition 14.3. *Sei Y einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung. Dann heißt π **die universelle Überlagerung** von X*

Bemerkung: Nach Satz 14.2 ist π eindeutig bis auf Isomorphie!
Außerdem folgt in dieser Situation, dass $\mathscr{D}(\pi) \simeq \pi_1(X)$, nach (13.38)

Lemma 14.4. *Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung, X lokal zusammenhängend und $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{D}(\pi)$ eine Untergruppe der Decktransformationsgruppe, sowie $Y/_{\mathscr{G}} :=$ Quotientenraum von Y nach der Äquivalenzrelation (Gruppenoperation):*
$y_0 \sim y_1 :\leftrightarrow \exists\ h \in \mathscr{G} :\ h(y_0) = y_1$
Dann sind $\pi' : Y \to Y/_{\mathscr{G}}$, $\pi'(y) = [y]$ und $\pi'' : Y/_{\mathscr{G}} \to X$, $\pi''([y]) := \pi(y)$ Überlagerungen mit $\pi'' \circ \pi' = \pi$ und $\mathscr{D}(\pi') = \mathscr{G}$

Beweis. Skizze:
Sei $x_0 \in X$ und U eine offene, zusammenhängende Umgebung aus der Definition der Überlagerung, dann ist $\pi^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ und U_i sind gerade die Zusammenhangskomponenten von $\pi^{-1}(U)$ und $\pi_{|U_i} : U_i \to U$ sind Homöomorphismen..
$\forall h \in \mathscr{D}(\pi)\ \exists\ \sigma = \sigma(h) \in S_I$ (wobei S_I die bijektiven Selbstabbildungen von I sind) mit $h(U_i) = U_{\sigma(i)}\ \forall i \in I$
Daraus folgt mit einigem technischen Aufwand die Behauptung. □

Beispiel 14.5. *$Y = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2} = T^2$, $\mathscr{D}(\pi) = \mathbb{Z}^2$, $\mathscr{G} = \{0\} \times \mathbb{Z}$, dann ist die Decktransformationsgruppe von $\pi' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/_{\{0\} \times \mathbb{Z}}$ natürlich gerade $\mathscr{D}(\pi') = \{0\} \times \mathbb{Z}$.*

Satz 14.6. *(Universalität der universellen Überlagerung)*
Sei $\widetilde{\pi} : (\widetilde{Y}, \widetilde{y_0}) \to (X, x_0)$ universelle Überlagerung von X und $\pi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine andere Überlagerung, sowie $\mathscr{G} := I_{\widetilde{y_0}}^{-1}(\pi_*(\pi_1(Y, y_0))) \subseteq \mathscr{D}(\widetilde{\pi})$. Außerdem seien π', π'' wie im vorherigen Lemma.
Dann ist $\pi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ isomorph zu π'' mit $\pi'' : (\widetilde{Y}/_{\mathscr{G}}, [\widetilde{y_0}]) \to (X, x_0)$
D.h. also, dass man jede Überlagerung als Faktorisierung der universellen Überlagerung wiederfinden kann.

Beweis. $\pi''_* \circ I^{\pi'}_{\widetilde{y_0}} = (I^{\widetilde{\pi}}_{\widetilde{y_0}})_{|\mathscr{G}}$, denn:
$\pi''_*([\pi' \circ \gamma]) = [\pi'' \circ \pi' \circ \gamma] = [\widetilde{\pi} \circ \gamma]$
Damit gilt:
$\pi''_*(\pi_1(\widetilde{Y}_{\mathscr{G}}, [\widetilde{y_0}]) \overset{13.38,\ 14.4}{=} \pi''_*(I^{\pi'}_{\widetilde{y_0}}(\mathscr{G})) = I^{\widetilde{\pi}}_{\widetilde{y_0}}(\mathscr{G}) = \pi_*(\pi_1(Y, y_0))$
Damit folgt die Behauptung aus Satz 14.2. □

Zum Abschluß dieses Kapitels soll nun noch die Existenz einer universellen Überlagerung nachgewiesen werden. Dazu benötigen wir noch eine letzte

Definition 14.7. *Ein topologischer Raum X heißt* ***semilokal einfach zusammenhängend*** $:\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ $\exists$ *eine Umgebung U von x, so dass jede in U geschlossene Kurve in X zusammenziehbar ist.*
(um ***lokal*** *einfach zusammenhängend zu sein, muss der Weg schon in U zusammenziehbar sein.)*

Beispiel 14.8. *(i.) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow X$ lokal einfach zusammenhängend. Dies gilt allgemeiner für jede topologische Mannigfaltigkeit.*

(ii.) Wähle in $\mathbb{R}^2$ die Menge aller Kreise mit Mittelpunkt $(\frac{1}{n}, 0)$ und Radius $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (Hawaiian earring).
Diese Menge ist nicht lokal einfach zusammenhängend (Problem in 0), aber wohl semilokal einfach zusammenhängend.

(iii.) Es gibt Räume die nicht lokal einfach zusammenhängend, aber einfach zusammenhängend sind. Man wähle z.b im $\mathbb{R}^3$ die Kreise aus (ii.) und ergänze diese zu Kegelmänteln mit Spitze in $(0,0,1)$

Satz 14.9. *Sei X zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Dann existiert ein einfach zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum Y und eine Überlagerung $\pi : Y \to X$. (diese ist dann nach Definition universell)*

Beweis. Sei $x_0 \in X$ fest und $\Omega_{x_0}(X) := \{\alpha : [0,1] \to X \text{ stetig} \mid \alpha(0) = x_0\}$
Definiere auf Ω_{x_0} die Äquivalenzrelation:
$\alpha \sim \beta :\Leftrightarrow \alpha(1) = \beta(1) \ \wedge \ \alpha \sim_{\mathrm{rel}\{0,1\}} \beta$
Definiere $Y := \Omega_{x_0}/_\sim$ und schreibe $[[\alpha]]$ für Äquivalenzklassen in Y.
Weiter sei $\pi : Y \to X$ definiert durch $\pi([[\alpha]]) = \alpha(1) \in X$, sowie $\widetilde{x_0} := [[\epsilon_{x_0}]]$
$\Rightarrow \ \pi(\widetilde{x_0}) = x_0$

Wir definieren nun eine Topologie auf Y:
Zu $\alpha \in \Omega_{x_0}$ und einer wegzusammenhängenden Umgebung U von $x = \alpha(1)$ sei $V(U, \alpha) := \{[[\alpha * \gamma]] \mid \gamma : [0,1] \to U \text{ stetig},\ \gamma(0) = x\}$
Wenn $y = [[\alpha]] = [[\beta]]$ ist, so gilt: $V(U, \alpha) = V(U, \beta) =: V(U, y)$
Damit kann man nun definieren: $V \subseteq Y$ heißt offen $:\Leftrightarrow$
$\forall y \in V$ $\exists$ wegzusammenhängende Umgebung U von $\pi(y)$ mit $V(U, y) \subseteq V$
Es gilt: $\pi(V(U, y)) = U$

(i.) Dies definiert eine Topologie auf Y:

Vereinigungen von offenen Mengen sind offensichtlich offen.
Seien V_1, V_2 offen und $y \in V_1 \cap V_2$. Wähle die U_1, U_2 aus der Definition, dann folgt, dass $V(U, y) \subseteq V(U_1, y) \cap V(U_2, y)$ mit einem $U \subseteq U_1 \cap U_2$, $y \in U$

(ii.) π ist stetig bezüglich dieser Topologie:

Sei $W \subseteq X$ offen und $y \in \pi^{-1}(W)$. Wähle wegzusammenhängende Umgebung U von $\pi(y) \in W$ mit $\pi(y) \in U \subseteq W \Rightarrow V(U, y) \subseteq \pi^{-1}(W)$, da $\pi(V(U, y)) = U$.

(iii.) π ist offen:

Sei $V \subseteq Y$ offen und $x \in \pi(V) \Rightarrow \exists\ y \in V : \pi(y) = x \Rightarrow \exists$ wegzusammenhängende Umgebung U von x mit $V(U, y) \subseteq Y \Rightarrow x \in U = \pi(V(U, y)) \subseteq \pi(V) \Rightarrow \pi(V)$ ist offen

<u>(iv.)π ist eine Überlagerung:</u>

Sei $x \in X$ und U eine offene wegzusammenhängende Umgebung von x für die gilt, dass jeder geschlossene Weg in U in X zusammenziehbar ist (diese existiert da X lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend ist)
Folgende drei Punkte zeigen, dass π eine Überlagerung ist:

- Sei $y \in \pi^{-1}(x)$. Dann ist $\pi : V(U, y) \to U$ bijektiv.
  Die Surjektivität ist klar, es bleibt also nur die Injektivität zu zeigen.
  Seien dazu $y_1, y_2 \in V(U, y)$ und $\pi(y_1) = \pi(y_2)$, $y_1 = [[\alpha * \gamma_1]],\ y_2 = [[\alpha * \gamma_2]]$.
  Aus $\pi(y_1) = \pi(y_2)$ folgt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ und $\gamma_1 * \overline{\gamma_2}$ ist nach Definition von U auf einen Punkt zusammenziehbar, d.h. $[\gamma_1 * \overline{\gamma_2}] = e$ in $\pi_1(X, x)$
  Damit ist:
  $[(\alpha * \gamma_1) * \overline{(\alpha * \gamma_2)}] = [\alpha * (\gamma_1 * \overline{\gamma_2}) * \alpha] = J_{\overline{\alpha}}([\gamma_1 * \overline{\gamma_2}]) = e$
  wobei $J_{\overline{\alpha}}$ die Abbildung aus den vorherigen Kapiteln bezeichnet: $J_{\overline{\alpha}} : \pi(X, x) \to \pi(X, x_0)$
  Also ist $[(\alpha * \gamma_1) * \overline{(\alpha * \gamma_2)}] = e$ in $\pi(X, x_0)$ und damit nach Definition $y_1 = y_2$, also ist die Abbildung injektiv.
  Mit (ii.) und (iii.) folgt damit nun, dass $\pi_{|V(U,y)}$ ein Homöomorphismus ist.

- ZZ $\pi^{-1}(U) = \bigcup\limits_{y \in \pi^{-1}(x)} V(U, y)$ (bemerke: die $V(U, y)$ sind nach Definition offen) Die Inklusion "$\supseteq$" ist klar.
  Für die andere Richtung sei $z \in \pi^{-1}(U) \Rightarrow \exists\ \beta \in \Omega_{x_0}$ mit $[[\beta]] = z$ und $\beta(1) = \pi(z) \in U$.
  Wähle $\gamma : [0, 1] \to U$ stetig mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = \beta(1) \Rightarrow \beta \sim_{\mathrm{rel}\{0,1\}} (\beta * \overline{\gamma}) * \gamma$
  Es gilt $y := [[\beta * \overline{\gamma}]] \in \pi^{-1}(x)$ und $[[\beta]] = [[(\beta * \overline{\gamma}) * \gamma]] \in V(U, y)$

- Noch ZZ, dass die $V(U, y)$ disjunkt sind.
  Seien $y_1 = [[\alpha_1]] \in \pi^{-1}(x)$ und $y_2 = [[\alpha_2]] \in \pi^{-1}(x)$, sowie $z = [[\alpha_1 * \gamma_1]] = [[\alpha_2 * \gamma_2]] \in V(U, y_1) \cap V(U, y_2)$ mit $\gamma_i : [0, 1] \to U$ mit $\gamma_i(0) = \alpha_i(1),\ \gamma_i(1) = \pi(z),\ i = 1, 2$
  $\pi(X, x_0) \ni e = [(\alpha_1 * \gamma_1) * \overline{(\alpha_2 * \gamma_2)}] = [\alpha_1 * (\gamma_1 * \overline{\gamma_2}) * \overline{\alpha_2}] = [\alpha_1 * \overline{\alpha_2}] \Rightarrow \alpha_1 \sim_{\mathrm{rel}\{0,1\}} \alpha_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

Damit ist π eine Überlagerung.

<u>(v.)Y ist zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend:</u>

- Wir zeigen zunächst den Zusammenhang:
  $y = [[\alpha]] \in Y$. Für $t \in [0, 1]$ definiere den Weg $\alpha_t \in \Omega_{x_0}$ durch $\alpha_t(s) := \alpha(ts)$
  Definiere $\gamma : [0, 1] \to Y$ durch $\gamma(t) := [[\alpha_t]] \Rightarrow \gamma$ stetig. (dies wird hier nicht gezeigt)
  $\gamma(1) = [[\alpha_1]] = y$, $\gamma(0) = [[\alpha_0]] = \widetilde{x_0}$.
  Damit folgt, dass Y wegzusammenhängend ist.

- Der lokale Wegzusammenhang folgt aus dem lokalen Wegzusammenhang von X und den Überlagerungseigenschaften von π.

<u>(vi.)Y ist einfach zusammenhängend:</u>

Zeige $\pi_*(\pi_1(Y, \widetilde{x_0})) = \{e\} \in \pi(X, x_0)$, dann folgt der einfache Zusammenhang aus der Injektivität von π_*, nach (12.21) (ii.).
Sei also $[\alpha] \in \pi_*(\pi_1(Y, \widetilde{x_0}))$ wobei $\alpha : [0, 1] \to X$, $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$
Definiere wie in (v.) $\alpha_t(s) = \alpha(ts)$
$\Rightarrow [[\alpha_0]] = \widetilde{x_0}$ und $\pi([[\alpha_t]]) = \alpha_t(1) = \alpha(1)$
$\Rightarrow\ t \to \alpha(t)$ ist Lift von α
$\Rightarrow [\alpha] \in \pi_*(\pi_1(Y, \widetilde{x_0}))$ und damit folgt nach (13.18), dass $[[\alpha_1]] = \widetilde{x_0} \Leftrightarrow [\alpha] = e \in \pi(X, x_0)$ $\square$

A Der Satz von Seifert-van Kampen

Es soll hier noch kurz der wichtige Satz von Seifert-van Kampen vorgestellt werden mit dem man elegant Fundamentalgruppen komplizierterer Räume berechnen kann. Er soll hier allerdings nicht bewiesen werden und wird daher nur als Appendix geführt.

Satz A.1. *Sei $X = U \cup V$ ein topologischer Raum, U, V offen und $U, V, U \cap V$ wegzusammenhängend und $x \in U \cap V$. Es seien in*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,x) \arrow[dr, "(j_1)_*"] \arrow[drr, "h_1"] & & \\
\pi_1(U \cap V, x) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] & & \pi_1(X,x) \arrow[r, "h"] & G \\
 & \pi_1(V,x) \arrow[ur, "(j_2)_*"] \arrow[urr, "h_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

i_1, i_2, j_1, j_2 die Inklusionen und G eine beliebige Gruppe.
Es gilt: Für jedes Paar von Homomorphismen h_1, h_2 mit $h_1 \circ (i_1)_* = h_2 \circ (i_2)_*$ existiert ***genau*** *ein Homomorphismus h mit $h_k = h \circ (j_k)_*,\ k = 1, 2$*

Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Seifert-van Kampen ist

Folgerung A.2. *Ist $\pi_1(U \cap V, x) = \{e\}$ so folgt, dass $\pi_1(X, x)$ das freie Produkt von $(j_1)_*(\pi_1(U, x))$ und $(j_2)_*(\pi_1(V, x))$ ist.*

Beispiel A.3. *Es sei $X = \partial B(1, -1) \cup \partial B(1, 1) \subseteq \mathbb{C}$ eine liegende Acht. Dann ist $\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ das freie Produkt von $\mathbb{Z}$ mit sich selbst.*

Beweis. Schreibe $X = U \cup V$ mit $U = X \setminus \{-2\}$ und $V = X \setminus \{2\}$ dann sind U und V offen und $U \cap V$ ist einfach zusammenhängend, daher also $\pi_1(U \cap V, 0) = \{e\}$
Weiter ist $U \sim V \sim S^1$ und damit $\pi_1(U, 0) \simeq \pi_1(V, 0) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, also folgt die Behauptung aus obiger Folgerung. $\square$