Übungsblatt 1 zur Vorlesung "Topologie" im SS 16

Prof. V. Bangert **19. 4. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. Abgabe am 26. 4. 2016 vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1.
Seien C_1 und C_2 abgeschlossene Teilmengen eines topologischen Raums X. Zeigen Sie, dass $C_1 \cup C_2$ abgeschlossen in X ist. Finden Sie ein Beispiel eines topologischen Raums X und einer Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X, so dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ nicht abgesclossen in X ist.

Aufgabe 2.
Sei (X, d) metrischer Raum. Zeigen Sie

a)
$$d' : X \times X \to \mathbb{R}\ ,\ d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$
ist eine Distanzfunktion auf X und es gilt $d'(x,y) < 1$ für alle $x, y \in X$.

b) $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$

c) Ist $X = \mathbb{R}^n$ und d die durch die euklidische Norm induzierte Metrik auf $\mathbb{R}^n$, so sind d und d' nicht äquivalent.

Aufgabe 3.
Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = C^1([0,1],\mathbb{R})$ betrachten wir die C^0-Norm $\|\cdot\|_{C^0}$,
$$\|f\|_{C^0} := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
und die C^1-Norm $\|\cdot\|_{C^1}$,
$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0}.$$
Zeigen Sie, dass die von $\|\cdot\|_{C^1}$ auf V induzierte Topologie echt feiner ist als die von $\|\cdot\|_{C^0}$ induzierte Topologie (d.h. zeigen Sie: jede bzgl. $\|\cdot\|_{C^0}$ offene Menge ist offen bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}$, aber $\{f \in V \mid \|f\|_{C^1} < 1\}$ ist nicht offen bzgl. $\|\cdot\|_{C^0}$).

Aufgabe 4.
Geben Sie für folgende Teilmengen A des $\mathbb{R}^2$ (mit der üblichen Topologie) die Mengen $\mathring{A}$, $\overline{A}$ und ∂A an.

a) $A = \mathbb{Q}^2$

b) $A = ([0,1] \times (0,2)) \cup ((1,2) \times \{1\})$

Bei a) wird eine Begründung erwartet, bei b) genügt die Angabe der Ergebnisse.
Bei a) können Sie o. Bew. benutzen, dass es in jedem Interval $\varnothing \neq (a,b) \subset \mathbb{R}$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen gibt.