Übungsblatt 10 zur Vorlesung "Topologie" im SS 16

Prof. V. Bangert **28. 6. 2016**

Schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 5. 7. vor Beginn der Vorlesung.*

Aufgabe 1.

Sei X ein topologischer Raum.
Zeigen Sie: Der Kegel CX über X ist zusammenziehbar.

Aufgabe 2.

Zeigen Sie: Für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ homotopieäquivalent zu S^{n-1}.

Aufgabe 3.

Sei X kompakter topologischer Raum, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \to U$ stetig.
Zeigen Sie: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass jede stetige Abbildung $g : X \to U$, für die

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in X \tag{1}$$

gilt, in U zu f homotop ist.

Anleitung: Benutzen Sie die Kompaktheit von $f(X)$, um zu zeigen, dass

$$H(x,t) := (1-t)f(x) + tg(x)$$

in U liegt, falls (1) mit genügend kleinem $\varepsilon > 0$ gilt.

Aufgabe 4.

Es sei H ein Funktor von der Homotopiekategorie $\mathcal{H}$top in der Kategorie $\mathcal{G}$rp der Gruppen, der 1-punktigen Räumen die triviale Gruppe $G = \{e\}$ zuordnet.

a) Ist X zusammenziehbarer topologischer Raum, so ist $H(X)$ die triviale Gruppe.

b) Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $H(S^{n-1})$ nicht die triviale Gruppe. Dann gibt es keine stetige Abbildung $r : D^n \to S^{n-1}$, so dass $r|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ gilt.

   Bemerkung: Eine solche Abbildung r heißt eine Retraktion von D^n auf S^{n-1}. Die Bedingung $r|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$, lässt sich auch schreiben als $r \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$, falls $i : S^{n-1} \to D^n$ die Inklusionsabbildung bezeichnet.

Lösung 1.
Sei $\pi : X \times [0,1] \to CX$ die kanonische Projektion und $\pi(X \times \{1\}) =: \{S\}$, $S \in CX$ die “Spitze des Kegels CX”. Sei $\tilde{h} : X \times [0,1] \times I \to CX$ definiert durch $\tilde{h}(x,s,t) = \pi(x,(1-t)s+t)$. Dann ist $\tilde{h}$ stetig und es gilt $\tilde{h}(x,1,t) = \pi(x,1) = S$. Nach (7.2) existiert eine stetige Abbildung $h : CX \times I \to CX$ mit $h(\pi(x,s),t) = \tilde{h}(x,s,t)$. Es gilt für alle $(x,s) \in X \times [0,1]$: $h_0(\pi(x,s)) = \pi(x,s)$ und $h_1(\pi(x,s)) = \pi(x,1) = S$. Nach (8.6) besagt das, dass CX zusammenziehbar ist.

Lösung 2.
Sei $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_2 = 1\}$, sei $f : \mathbb{R}^n \backslash \{p\} \to S^{n-1}$ mit $f(x) = \frac{(x-p)}{\|x-p\|_2}$, und $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \backslash \{p\}$ mit $g(y) = y + p$. Wir zeigen, dass f und g homotopieinvers zueinander sind. Für $y \in S^{n-1}$ gilt $f \circ g(y) = f(y+p) = \frac{y}{\|y\|_2} = y$, also $f \circ g = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$, insbesondere $f \circ g \sim \mathrm{id}_{S^{n-1}}$. Es gilt $g \circ f(x) = \frac{(x-p)}{\|x-p\|_2} + p$ mit $g \circ f : \mathbb{R}^n \backslash \{p\} \to p + S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \backslash \{p\}$. Definiere $h : (\mathbb{R}^n \backslash \{p\}) \times I \to \mathbb{R}^n \backslash \{p\}$ durch $h(x,t) := (1-t)x + t\left(\frac{(x-p)}{\|x-p\|_2} + p\right)$. (Es gilt: $h(x,t) = p + \left(1 - t + \frac{t}{\|x-p\|_2}\right)(x-p)$ und da $t \in [0,1]$ folgt $\left(1 - t + \frac{t}{\|x-p\|_2}\right) > 0$, also $h(\cdot,t) : \mathbb{R}^n \backslash \{p\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{p\}$.) Dann ist h stetig, $h_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \backslash \{p\}}$ und $h_1 = g \circ f$, d.h. $g \circ f \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \backslash \{p\}}$.

Lösung 3.
Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die Menge

$$f(X)^\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, x : |f(x) - y| < \varepsilon\}$$

in U enthalten ist: Zu jedem $y \in f(X)$ existiert ein $\varepsilon_y > 0$, so dass $B(y,\varepsilon_y) \subset U$ gilt. Da $f(X)$ kompakt ist, existieren $y_1 = f(x_1), ..., y_m = f(x_m)$ mit $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \varepsilon_i/2)$, wobei $\varepsilon_i := \varepsilon_{y_i} > 0$. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ und $g : X \to U$ stetig und $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$. Zu $x \in X$ existiert $i \in \{1,...,m\}$ mit $f(x) \in B(y_i, \varepsilon_i/2)$. Wegen $|g(x) - f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{2}\min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i$ folgt $g(x) \in B(y_i, \varepsilon_i)$. Da $B(y_i,\varepsilon_i)$ konvex ist, gilt $(1-t)f(x) + tg(x) \in B(y_i,\varepsilon_i) \subset U$ für alle $t \in [0,1]$.

Lösung 4.

a) Aus (8.10) folgt, dass H homotopieäquivalenten Räumen isomorphe Gruppen zuordnet. Also: X zusammenziehbar $\Leftrightarrow$ X homotopieäquivalent zu 1-punktigem Raum $\Rightarrow$ $H(X)$ triviale Gruppe.

b) Annahme: Es existiert eine Retraktion $r : D^n \to S^{n-1}$. Dann gilt $H(r \circ i) = H(r) \circ H(i) = H(\mathrm{id}_{S^{n-1}}) = \mathrm{id}_{H(S^{n-1})}$, wobei $H(i) : H(S^{n-1}) \to H(D^n)$ und $H(D^n)$ die triviale Gruppe ist. Da $H(S^{n-1})$ nach Voraussetzung nicht die triviale Gruppe ist, ist $H(i)$ nicht injektiv. Das widerspricht der Tatsache, dass $H(r) \circ H(i) = \mathrm{id}_{H(S^{n-1})}$ injektiv ist.