Übungsblatt 11 zur Vorlesung "Topologie" im SS 16

Prof. V. Bangert **5. 7. 2016**

Schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 12. 7. vor Beginn der Vorlesung.*

Aufgabe 1.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : S^1 \to U$ eine Schleife und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

Es existiert eine stückweise affine Schleife $\tilde{\gamma} : S^1 \to U$ mit $d(\gamma, \tilde{\gamma}) := \max_{s \in S^1} \|\gamma(s) - \tilde{\gamma}(s)\| < \varepsilon$, die in U rel$\{0,1\}$-homotop zu γ ist.

Dabei heißt $\tilde{\gamma} : S^1 = \frac{[0,1]}{\{0,1\}} \to U$ stückweise affin, falls ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1$ von $[0,1]$ existiert, so dass $\tilde{\gamma}|_{[t_{i-1}, t_i]}$ affin ist für jedes $i \in \{1, ..., k\}$.

Hinweis: vgl. Blatt 10 Aufgabe 3.

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie: Jede stetige Abbildung $f : X \to S^n$ mit $f(X) \neq S^n$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

   Anleitung: stereographische Projektion aus einem Punkt in $S^n \backslash f(X)$.

Sei $n \geq 3$ und sei $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ eine stückweise affine Schleife (vgl. Aufgabe 1).
Zeigen Sie:

b) γ ist in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ zusammenziehbar.

   Anleitung: Zeigen Sie, dass γ in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ homotop zu $\tilde{\gamma} : S^1 \to S^{n-1}$, $\tilde{\gamma}(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$, ist und dass $\tilde{\gamma}(S^1) \neq S^{n-1}$ ist. Benützen Sie dann Teil a).

c) Für $n \geq 3$ sind die Fundamentalgruppen von $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und S^{n-1} trivial. (Sie können im Beweis Aufgabe 1 voraussetzen.)

Aufgabe 3.

Sei Y der Produktraum der topologischen Räume X_1, X_2 und $y = (x_1, x_2) \in Y$. Seien $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ und $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ die Projektionen auf die Faktoren. Zeigen Sie:

$p_{1*} \times p_{2*} : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$ ist ein Isomorphismus von $\pi_1(Y, y)$ auf $\pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$ mit der Produktgruppenstruktur.

(Die Produktgruppenstruktur zweier Gruppen $(G_1, \cdot)$ und $(G_2, \cdot)$ ist wie folgt definiert: Sind $g_1, h_1 \in G_1$ und $g_2, h_2 \in G_2$, so ist $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) := (g_1 \cdot h_1, g_2 \cdot h_2)$.)

Aufgabe 4.

Sei X einfach zusammenhängender topologischer Raum und $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ Wege in X mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) =: x_0$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) =: x_1$.

Zeigen Sie: γ_0 und γ_1 sind rel$\{0,1\}$-homotop.

Anleitung: Betrachten Sie eine Zusammenziehung $h : [0,1] \times I \to X$ von $\gamma_0 * \bar{\gamma}_1 \in \Omega_{X,x_0}$ durch Kurven $h_t \in \Omega_{X,x_0}$ und $k_t := h_t * \gamma_1$.

Lösung 1.
Sei $\varepsilon > 0$ und $S^1 = \frac{[0,1]}{\{0,1\}}$. Da $\gamma : [0,1] \to U$ stetig und $[0,1]$ kompakt, existiert nach Aufgabe 3, Blatt 10 ein $\bar{\varepsilon} > 0$, so dass jede Schleife $\tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ mit $\|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| < \bar{\varepsilon}$ für alle $t \in [0,1]$, in U homotop zu γ ist. Wegen der gleichmässigen Stetigkeit von γ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $t, \tilde{t} \in [0,1]$ gilt: falls $|t - \tilde{t}| < \delta$, dann $\|\gamma(t) - \gamma(\tilde{t})\| < \frac{\min\{\varepsilon,\bar{\varepsilon}\}}{2}$. Definiere für $n \in \mathbb{N}_0$ $t_n := \min\{n\delta, 1\}$ und damit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1$, und die affine Schleife $\tilde{\gamma}$ mit

$$\tilde{\gamma}|_{[t_n,t_{n+1}]}(t) := \gamma(t_n) + \frac{(t - t_n)}{(t_{n+1} - t_n)}(\gamma(t_{n+1}) - \gamma(t_n)) \quad \text{für} \quad 0 \le n \le k-1.$$

Es folgt für $0 \le n \le k-1$: $\tilde{\gamma}(t_n) = \gamma(t_n)$ und $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(0) = \gamma(1)$ und $\tilde{\gamma}$ stetig.
Für $t \in [0,1]$ ex. $0 \le n \le k-1$ mit $t \in [t_n, t_{n+1}]$ und nach Wahl von δ, $\|\gamma(t) - \gamma(t_n)\| < \frac{\min\{\varepsilon,\bar{\varepsilon}\}}{2}$. Weiterhin gilt nach der Definition von $\tilde{\gamma}$ und t_n für das gleiche t: $\|\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t_n)\| \le \|\tilde{\gamma}(t_{n+1}) - \tilde{\gamma}(t_n)\| = \|\gamma(t_{n+1}) - \gamma(t_n)\| < \frac{\min\{\varepsilon,\bar{\varepsilon}\}}{2}$. Das ergibt

$$\|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| \le \|\gamma(t) - \gamma(t_n)\| + \|\gamma(t_n) - \tilde{\gamma}(t)\| = \|\gamma(t) - \gamma(t_n)\| + \|\tilde{\gamma}(t_n) - \tilde{\gamma}(t)\| < \min\{\varepsilon, \bar{\varepsilon}\}.$$

Nach Wahl von $\bar{\varepsilon}$ ist $\tilde{\gamma}$ in U homotop zu γ.

Lösung 2.

a) Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und o.E. sei der Nordpol $e_{n+1} \notin f(X)$. Die stereographische Projektion $P_N : S^n \backslash \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $P_N(x_1, ..., x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right)$ und ihre Umkehrabbildung durch $P_N^{-1}(y_1, ..., y_n) = \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, ..., \frac{y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{-1 + \|y\|^2}{1 + \|y\|^2}\right)$. Damit ist es leicht zu sehen, dass P_N ein Homöomorphismus ist. Die Abbildung $h : X \times I \to S^n$, $h(x,t) = P_N^{-1}((1-t)P_N(f(x)))$ ist stetig mit $h(x,0) = f(x)$ und $h(x,1) = -e_{n+1} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ für alle $x \in X$.

b) $H(s,t) := t\tilde{\gamma}(s) + (1-t)\gamma(s)$ ist eine Homotopie in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ zwischen $\gamma(s)$ und $\tilde{\gamma}(s) = \frac{\gamma(s)}{\|\gamma(s)\|}$. Da γ stückweise affin ist, liegt $\tilde{\gamma}(S^1)$ in der Vereinigung $\bigcup_{j=1}^k G^j$ von endlich vielen Großkreisen $G_j \subset S^{n-1}$. Da Großkreise in S^{n-1} abgeschlossen sind und für $n \ge 3$ leeres Inneres haben, folgt per Induktion, dass $S^{n-1} \backslash \bigcup_{j=1}^k G^j$ offen und nichtleer ist. Speziell ist $\tilde{\gamma}(S^1) \neq S^{n-1}$. Nach Teil a) ist $\tilde{\gamma}$ in S^{n-1} homotop zu einer konstanten Abbildung. Also ist γ in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ homotop zu einer konstanten Abbildung.

c) Sei $\gamma \in \Omega(S^{n-1}, x_0)$, $n \ge 3$. Nach Aufgabe 1, ex. eine in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ zu γ homotope stückweise affine Schleife $\bar{\gamma} \in \Omega(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, x_0)$ und nach Teil b) ist $\bar{\gamma}$ in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ zusammenziehbar. Da S^{n-1} wegzshgd., ist es damit 1-zshgd., und nach Fakt (9.12) gilt für alle $x \in S^{n-1}$, $\pi_1(S^{n-1}, x) = \{e\}$. Da $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ homotopieäquivalent zu S^{n-1} (vgl. Lösung der Aufgabe 2, Blatt 10), gilt nach Satz (9.15) für alle $y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$: $\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, y) = \{e\}$.

Lösung 3.
Nach Def. der Produkttopologie: $\gamma \in \Omega(Y, y) \Leftrightarrow (\gamma_i := p_i \circ \gamma \in \Omega(X_i, x_i)$ für $i = 1, 2)$. Ausserdem gilt für $\gamma, \tilde{\gamma} \in \Omega(Y, y)$, dass $H : [0,1] \times I \to Y$ stetig mit $H_0 = \gamma$, $H_1 = \tilde{\gamma}$ und $H(0,s) = H(1,s) = y$, genau dann wenn für $i = 1, 2$, $H^i := p_i \circ H$ stetig mit $H_0^i = \gamma_i$, $H_1^i = \tilde{\gamma}_i$ und $H^i(0,s) = H^i(1,s) = x_i$, also $\gamma \sim_{\{0,1\}} \tilde{\gamma} \Leftrightarrow (p_1 \circ \gamma, p_2 \circ \gamma) \sim_{\{0,1\}} (p_1 \circ \tilde{\gamma}, p_2 \circ \tilde{\gamma})$. Damit ist $p_{1*} \times p_{2*} : [\gamma] \to ([\gamma_1], [\gamma_2])$ wohldefiniert und bijektiv. Es gilt offensichtlich $\gamma * \tilde{\gamma} = (\gamma_1 * \tilde{\gamma}_1, \gamma_2 * \tilde{\gamma}_2)$, also $p_{1*} \times p_{2*}([\gamma] \cdot [\tilde{\gamma}]) = p_{1*} \times p_{2*}([\gamma * \tilde{\gamma}]) = p_{1*} \times p_{2*}([(\gamma_1 * \tilde{\gamma}_1, \gamma_2 * \tilde{\gamma}_2)]) = ([(\gamma_1 * \tilde{\gamma}_1], [\gamma_2 * \tilde{\gamma}_2)]) = ([(\gamma_1] \cdot [\tilde{\gamma}_1], [\gamma_2] \cdot [\tilde{\gamma}_2)])$.

Lösung 4.
Da $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$ und $\gamma_0 * \bar{\gamma}_1 \in \Omega_{X,x_0}$ gilt, existiert eine Homotopie $h : [0,1] \times I \to X$ mit $h_0 = \gamma_0 * \bar{\gamma}_1$, $h_1([0,1]) = \{x_0\}$ und $h(0,t) = h(1,t) = x_0$ für alle $t \in I$. Dann ist $k(s,t) := (h_t * \gamma_1)(s)$ stetig, $k(0,t) = h_t(0) = h(0,t) = x_0$ und $k(1,t) = \gamma_1(1) = x_1$ für alle $t \in I$ und $k_0 = h_0 * \gamma_1 = (\gamma_0 * \bar{\gamma}_1) * \gamma_1$, $k_1 = h_1 * \gamma_1 = \varepsilon_{x_0} * \gamma_1$. Man sieht leicht (wie im Beweis von (9.3), (9.4) und (9.6)), dass

$$k_0 = (\gamma_0 * \bar{\gamma}_1) * \gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_0 * (\bar{\gamma}_1 * \gamma_1) \sim_{\{0,1\}} \gamma_0 * \varepsilon_{x_0} \sim_{\{0,1\}} \gamma_0$$

und $k_1 = \varepsilon_{x_0} * \gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_1$ gilt. Also $\gamma_0 \sim_{\{0,1\}} \gamma_1$.