Übungsblatt 12 zur Vorlesung “Topologie” im SS 16

Prof. V. Bangert **12. 7. 2016**

Schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 19. 7. vor Beginn der Vorlesung.*

Aufgabe 1.

Sei $X \neq \varnothing$ zusammenhängender topologischer Raum und $p : Y \to X$ Überlagerung.

Zeigen Sie: Y ist genau dann kompakt, wenn X kompakt ist und ein $x_0 \in X$ existiert, so dass $p^{-1}(\{x_0\})$ endlich ist.

Aufgabe 2.

a) Sei $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die kanonische Projektion, $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$.

Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist $\pi_n : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \pi_n(x + \mathbb{Z}) := nx + \mathbb{Z}$ wohldefiniert und eine n-blättrige Überlagerung.

b) Sei $\tilde{\pi}_n : S^1 \subset \mathbb{C} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ definiert durch $\tilde{\pi}_n(z) = z^n$. Zeigen Sie: Es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1 \subset \mathbb{C}$, so dass $\tilde{\pi}_n = h \circ \pi_n \circ h^{-1}$. Schließen Sie daraus, dass $\tilde{\pi}_n$ eine n-blättrige Überlagerung ist.

Aufgabe 3.

Sei $p \in \mathbb{R}^2$ und für $i = 1, 2$, seien $\gamma_i : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \gamma_i(S^1) \subset \mathbb{R}^2$ Homöomorphismen mit $\gamma_1([0]) = \gamma_2([0]) = p$ und $\gamma_1(S^1) \cap \gamma_2(S^1) = \{p\}$. Sei $X = \gamma_1(S^1) \cup \gamma_2(S^1) \subset \mathbb{R}^2$ (d.h. X ist homöomorph zur Ziffer 8) und $Y = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$.

a) Skizzieren Sie Y.

b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\pi : Y \to X$, definiert durch $\pi(y_1, y_2) = \gamma_1([y_1])$ falls $y_2 \in \mathbb{Z}$ und $\pi(y_1, y_2) = \gamma_2([y_2])$ falls $y_1 \in \mathbb{Z}$, ist eine Überlagerung.

c) Für $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ bezeichne $T_{(k_1,k_2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Translation $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y_1 + k_1, y_2 + k_2) \in \mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie: $\pi \circ T_{(k_1,k_2)} = \pi$.

Aufgabe 4.

Sei $n \neq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sowie $\varnothing \neq V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: Ω und V sind nicht homöomorph.

Hinweis: Benutzen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ $B(p, \varepsilon)\backslash\{p\} \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist, vgl. Blatt 11, Aufgabe 2 c).

Lösung 1.

Sei Y kompakt. Da p stetig ist, ist auch X kompakt (6.6). Nach Def. (13.1) existiert eine offene Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von Y, so dass für alle $i \in I$, $p|_{V_i} : V_i \to p(V_i)$ ein Homöomorphismus und da Y kompakt, gibt es eine endlich Teilüberdeckung $(V_i)_{i\in E}$. Annahme: es gibt ein $x \in X$, so dass $p^{-1}(\{x\})$ unendlich ist. Dann muss es ein $i \in E$ geben, mit $y_1, y_2 \in p^{-1}(\{x\}) \cap V_i$ und $y_1 \neq y_2$, in Widerspruch zur Injektivität von $p|_{V_i}$.

Sei X kompakt und zusammenhängend, und sei $\#(p^{-1}(\{x_0\})) = n \in \mathbb{N}$. Nach Fakt (13.2) gilt $\#(p^{-1}(\{x\})) = n$ für alle $x \in X$. Sei $(V_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von Y. Sei $x \in X$, $p^{-1}(\{x\}) = \{y_1, ..., y_n\}$ und sei $V_{y_i} \in (V_i)_{i\in I}$ mit $y_i \in V_{y_i}$. Sei weiter U_x offene Umgebung von x wie in Def. (13.1) mit $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{i=1}^n \tilde{V}_{y_i}$ wo $\tilde{V}_{y_i} \cap \tilde{V}_{y_j} = \varnothing$ für $i \neq j$ und $p|_{\tilde{V}_{y_i}} : \tilde{V}_i \to p(\tilde{V}_i)$ ein Homöomorphismus. Dann ist $x \in \tilde{U}_x := \bigcap_{i=1}^n p(V_{y_i} \cap \tilde{V}_{y_i})$ und diese Menge ist offen. Die offene Überdeckung $(\tilde{U}_x)_{x\in X}$ von X hat nach Kompaktheit endliche Teilüberdeckung gegeben durch $(\tilde{U}_{x_j})_{j=1}^m$. Sei $p^{-1}(\{x_j\}) = \{y_{j_1}, ..., y_{j_n}\}$. Nach Definition der Überlagerung ist dann $(\tilde{V}_{y_{j_i}} \cap V_{y_{j_i}})_{j,i=1}^{m,n}$ eine endliche offene Überdeckung von Y und somit $(\tilde{V}_{y_{j_i}})_{j,i=1}^{m,n}$ endliche Teilüberdeckung von $(V_i)_{i\in I}$.

Lösung 2.

a) Sei $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_n(x) = nx$. Es gilt für $k \in \mathbb{Z}$: $p_n(x)+\mathbb{Z} = nx+\mathbb{Z} = nx+nk+\mathbb{Z} = p_n(x+k)+\mathbb{Z}$, also ist π_n wohl definiert via $\pi_n \circ \pi = \pi \circ p_n$ und da $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ stetig, ist nach (7.2) auch π_n stetig. Für $x+\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $U := (x-1/2, x+1/2)+\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (die offen ist) gilt $\pi_n^{-1}(U) = \bigcup_{i=0}^{n-1} (\frac{2x-1}{2n}, \frac{2x+1}{2n}) + \frac{i}{n} + \mathbb{Z}$. Es gilt für $i = 1, ..., n-1$: $U_i := (\frac{2x-1}{2n}, \frac{2x+1}{2n}) + \frac{i}{n} + \mathbb{Z}$ ist offen, $U_i \cap U_j = \varnothing$ für $i \neq j$ und für alle $k \in \mathbb{Z}$, $i = 0, ..., n-1$ gilt $p_n^{-1} : (x-1/2, x+1/2)+i+nk \to (\frac{2x-1}{2n}, \frac{2x+1}{2n}) + \frac{i}{n} + k$ mit $p_n^{-1}(x) = x/n$ also ist $\pi_n|_{U_i} : U_i \to U$ ein Homöomorphism.

b) Sei $p : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$, $p(x) = e^{2\pi ix}$, mit der komplexen Exponentialfunktion definiert. Es gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$, $p(x+k) = p(x)$, also ist $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ wohldefiniert via $h \circ \pi := p$, und stetig. Weil $p'(x) = h'(x+\mathbb{Z}) \neq 0$ für alle $x+\mathbb{Z}$, ist h offen und da auch bijektiv, ist h ein Homöomorphismus. Dann ist $\tilde{\pi}_n = h \circ \pi_n \circ h^{-1} : S^1 \to S^1$ stetig und für $z \in S^1$ mit $z = e^{2\pi ix+\mathbb{Z}}$ und offenen Mengen U, U_i aus Teil a), ist die Menge $h(U) \subset S^1$ offene Umgebung von z mit $\tilde{\pi}_n^{-1}(h(U)) = \bigcup_{i=1}^{n-1} h(U_i) \subset S^1$, wobei $h(U_i) \cap h(U_j) = \varnothing$ für $i \neq j$ und $\tilde{\pi}_n|_{h(U_i)} : h(U_i) \to h(U)$ Homöomorphismus.

Lösung 3.

b) Zunächst konstruieren wir zu $q \in X\backslash\{p\}$ eine Umgebung $U \subset X$ von q, die durch π gleichmäßig überlagert wird.

O.E. sei $q = \gamma_1([t])$ mit $t \in (0,1)$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subset (0,1)$ und setze $V = (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Dann ist $U := \gamma_1(V)$ offen in X, $q \in U$, und $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^2}(\tilde{V}+k)$, wobei $\tilde{V} := V \times \{0\} \subset Y$.

Dann ist für jedes $k \in \mathbb{Z}^2$ die Abbildung $\pi|_{\tilde{V}+k} : \tilde{V}+k \to U \subset X$ bijektiv und stetig, und injektiv und stetig fortsetzbar auf den (kompakten) Abschluss von $\tilde{V}+k$ in Y. Mit Satz (6.6)(b) folgt, dass $\pi|_{\tilde{V}+k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^2$ ein Homöomorphismus auf U ist. Da die $\tilde{V}+k$ eine diskunkte Zerlegung von $\pi^{-1}(U)$ sind, haben wir gezeigt, dass U durch π gleichmäßig überlagert wird.

Um das auch für p nachzuweisen, betrachten wir die offene Umgebung $U = \gamma_1((-1/4, 1/4)) \cup \gamma_2((-1/4, 1/4))$ von p in X. Dann gilt $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^2}(((-1/4,1/4)\times\{0\}) \cup (\{0\}\times(-1/4,1/4)) + k)$. Wie im vorangehenden Fall zeigt man, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}^2$ gilt: $\pi|_{((-1/4,1/4)\times\{0\})\cup(\{0\}\times(-1/4,1/4))+k}$ ist ein Homöomorphismus auf U.

c) Offenbar gilt für alle $(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$: $T_{(k_1,k_2)}(Y) = Y$, d.h. $\pi \circ T_{(k_1,k_2)}$ ist auf ganz Y definiert.

Ist $y_2 \in \mathbb{Z}$, so $(\pi \circ T_{(k_1,k_2)})(y_1,y_2) = \gamma_1([y_1+k_1]) = \gamma_1([y_1]) = \pi(y_1,y_2)$.
Ist $y_1 \in \mathbb{Z}$, so $(\pi \circ T_{(k_1,k_2)})(y_1,y_2) = \gamma_2([y_2+k_2]) = \gamma_2([y_2]) = \pi(y_1,y_2)$.

Lösung 4.
Annahme: $h : \Omega \to V$ ist Homöomorphismus. Da $\varnothing \neq V \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, existiert $p \in V$ und $\varepsilon > 0$ mit $B(p,\varepsilon) \subset V$. Setze $U = h^{-1}(B(p,\varepsilon)) \subset \Omega$. Dann ist $h|_U : U \to B(p,\varepsilon)$ Homöomorphismus.
Für $n > 2$ ist $B(p,\varepsilon)\backslash\{p\}$ einfach zusammenhängend, also auch $U\backslash\{q\}$ für $q := h^{-1}(p)$. Da $q \in U$ und U offen ist, existiert ein $r > 0$, so dass die Kreislinie $\gamma(t) := q + r(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), t \in [0,1]$ in U verläuft. Da $U\backslash\{q\}$ einfach zusammenhängend ist, ist γ in $U\backslash\{q\}$ durch geschlossene Kurven zusammenziehbar, im Widerspruch zu $n(\gamma, q) = 1$ und Folgerung (10.11).
Für $n = 1$ ist $B(p,\varepsilon)\backslash\{p\}$ nicht wegzusammenhängend, im gegensatz zu $U\backslash\{q\}$.