Übungsblatt 2 zur Vorlesung "Topologie" im SS 16

Prof. V. Bangert **26. 4. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. Abgabe am 3. 5. 2016 vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1.
Sei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ und $X := \{\vec{0}\} \cup S^{n-1}$, wobei $\vec{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. Auf X definiert $d : X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x, y) := \|x - y\|_2$$

eine Metrik (die Restriktion der euklidischen Metrik).
Zeigen Sie, dass $\overline{B^d(\vec{0}, 1)} = \{\vec{0}\}$ gilt, während $\{y \in X \mid d(\vec{0}, y) \leq 1\} = X$.

Aufgabe 2.
Sei $A = [0,1] \times [0,1]$ mit der von (der üblichen Topologie des) $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie $\mathcal{O}_A$. Welche der folgenden Mengen sind offen, welche abgeschlossen (bzgl. $\mathcal{O}_A$)?

a) $[0,1] \times [0,1)$

b) $[0,1] \times [0,1]$

c) $\{0\} \times [0,1]$

d) $(0,1) \times \{0\}$

e) $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

Aufgabe 3.
Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum. Zeigen Sie:

a) Sind A, B Teilmengen von X, so gilt $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ und $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

b) Sind $A_i \subset X$ für alle $i \in I$, so gilt

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{und} \quad \bigcup_{i \in I} \mathring{A}_i \subset \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^\circ.$$

Aufgabe 4.
Sei $\|\cdot\|$ Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, sei $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$.
Zeigen Sie: Die Menge

$$\mathcal{B} = \left\{ B\Big(x, \frac{1}{k}\Big) \;\Big|\; x \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

ist eine Basis der üblichen Topologie des $\mathbb{R}^n$.