Übungsblatt 3 zur Vorlesung "Topologie" im SS 16

Prof. V. Bangert **3. 5. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. Abgabe am 10. 5. 2016 vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1.
Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Die Abbildungen $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\alpha, v) \to \alpha v$, und $V \times V \to V$, $(v, w) \to v + w$, sind stetig (bzgl. der Produkttopologie).

b) Ist X topologischer Raum und sind $f, g : X \to V$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R}$, so sind $f + g : X \to V$ und $\alpha f : X \to V$ stetig.

Aufgabe 2.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei (X_n, d_n) ein metrischer Raum mit $d_n \leq 1$. Sei $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ und für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ sei

$$d(x, y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

Zeigen Sie:

a) $d : X \times X$ ist eine Metrik auf X.

b) d erzeugt die Produkttopologie auf X.

Aufgabe 3.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n := \{0, 1\}$, versehen mit der diskreten Topologie, und $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ der Produkttraum.

a) Sei $f : X \to [0, 1] \subset \mathbb{R}$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$. (D.h., $0, x_1x_2x_3...$ ist eine Dualdarstellung der reellen Zahl $f(x)$.)
Zeigen Sie: f ist stetig und surjektiv, aber nicht injektiv.

b) Sei $g : X \to [0, 1] \subset \mathbb{R}$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$.
Zeigen Sie: g ist stetig und injektiv, aber nicht surjektiv.
(Das Bild $g(X) \subset [0, 1]$ von g hat eine recht komplizierte Gestalt. Versuchen Sie, sich eine Vorstellung davon zu verschaffen.)

Aufgabe 4.
Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie disjunkter topologischer Räume.
Zeigen Sie: Die Summentopologie $\mathcal{O}$ auf $X = \cup_{i\in I} X_i$ ist die einzige Topologie, so dass für jeden top. Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ gilt: $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist genau dann stetig, wenn für alle $i \in I$ gilt $f|_{X_i} : (X_i, \mathcal{O}_i) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist stetig.