Übungsblatt 4 zur Vorlesung "Topologie" im SS 16

Prof. V. Bangert **10. 5. 2016**

Schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 24. 5. vor Beginn der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Sei (X, d) metrischer Raum und $\bar{d}$ die durch

$$\bar{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

definierte Metrik auf $X \times X$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{O}(\bar{d})$ ist die Produkttopologie von $\mathcal{O}(d)$ und $\mathcal{O}(d)$.

b) $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist stetig.
Anleitung: Zeigen Sie, dass für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ gilt

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq \bar{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)),$$

d.h. d ist 1-Lipschitz als Abbildung von $(X \times X, \bar{d})$ nach $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (2 Punkte)
Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ sei am Punkt $x \in X$ stetig.

Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen x konvergiert, so konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y gegen $f(x)$.

Aufgabe 3.
Betrachte $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ mit der Box-Topologie $\tilde{\mathcal{O}}$
(für die $\tilde{\mathcal{B}} = \{\prod_{k\in\mathbb{N}} V_k \mid \forall k \in \mathbb{N} : V_k \subset \mathbb{R} \text{ offen } \}$ eine Basis ist).

Zeigen Sie: Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzgl. $\tilde{\mathcal{O}}$ gegen $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $k \geq n_0$ gilt: $f_n(k) = f(k)$.

Anleitung: Sonst existieren streng monoton wachsende Folgen $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $f_{n_i}(k_i) \neq f(k_i)$. Damit können Sie eine Umgebung $V \in \tilde{\mathcal{B}}$ von f angeben, die keines der Folgenglieder $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ enthält.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, dass alle nichtleeren, offenen Intervalle (einschließlich der halbseitig unendlichen und $\mathbb{R}$ selbst) zueinander homöomorph sind.

b) Finden Sie einen Homöomorphismus von der oberen Halbebene $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ (mit der vom $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie) auf die ganze Ebene $\mathbb{R}^2$.